

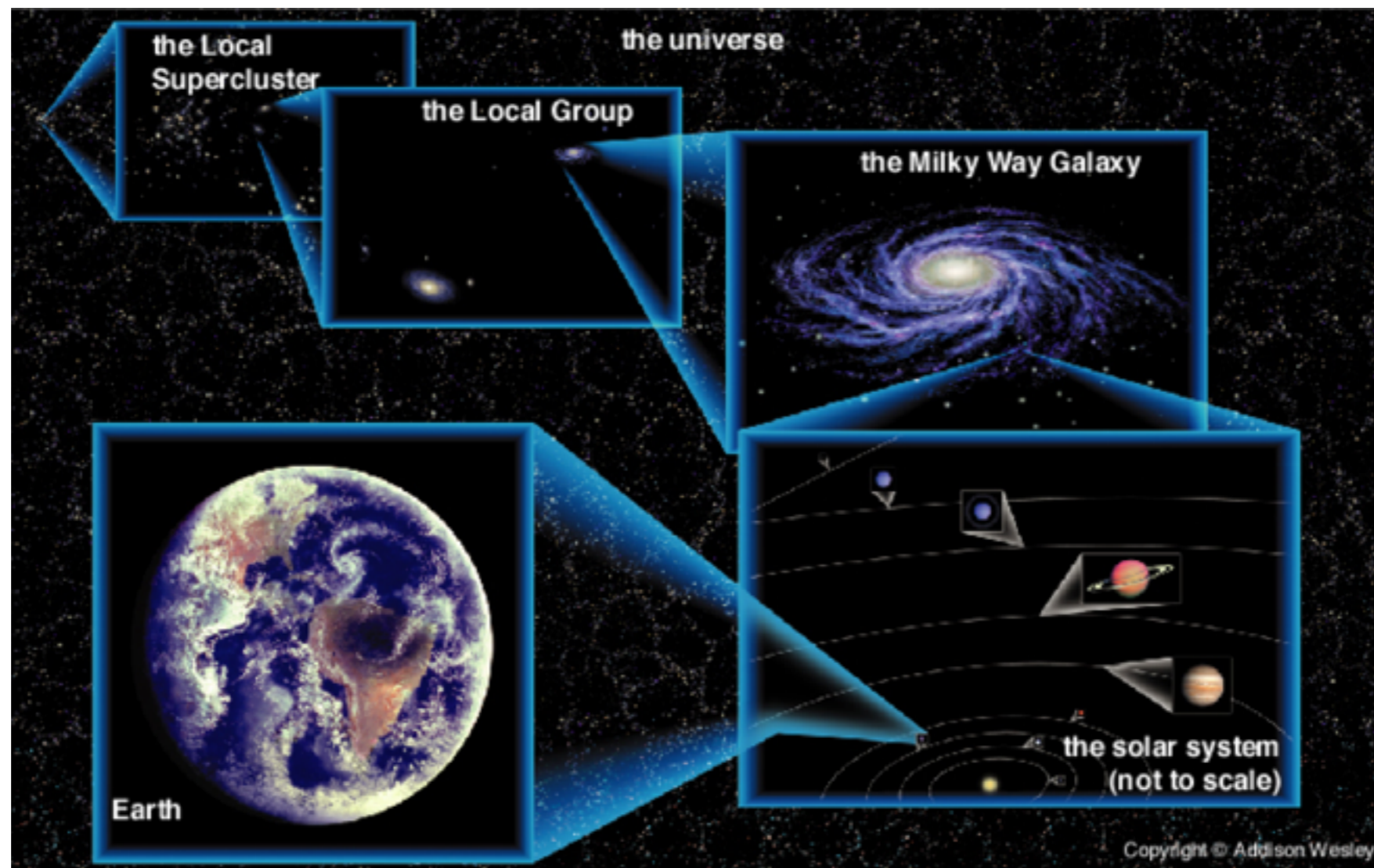
우리가 관측 가능한 우주 ~ 3,000 Mpc

별(항성): 스스로 빛을 내는 천체 (행성: 별 주위의 궤도를 따라 도는 물체)

은하: 수백억 개의 별과 성간물질로 이루어진 계

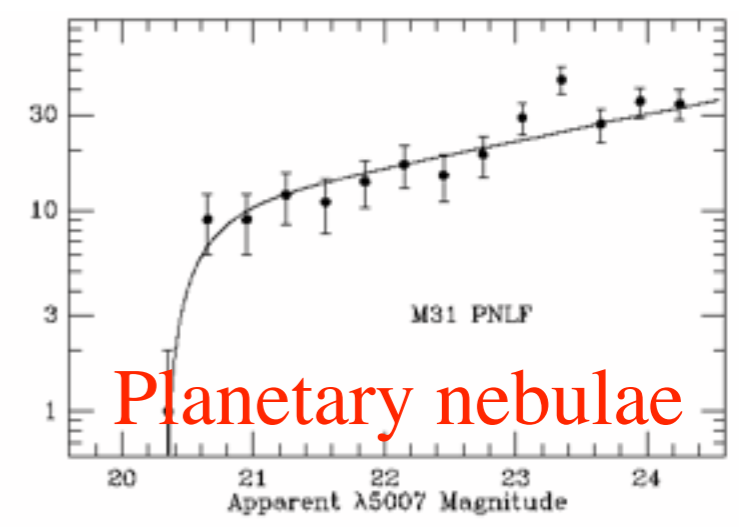
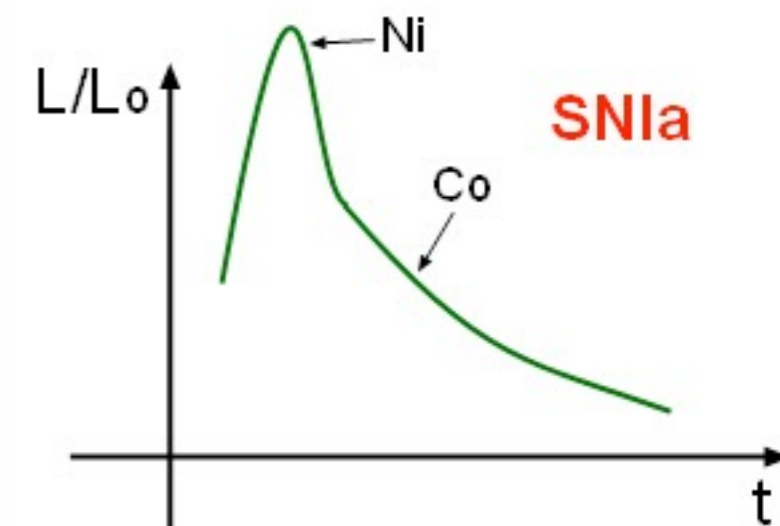
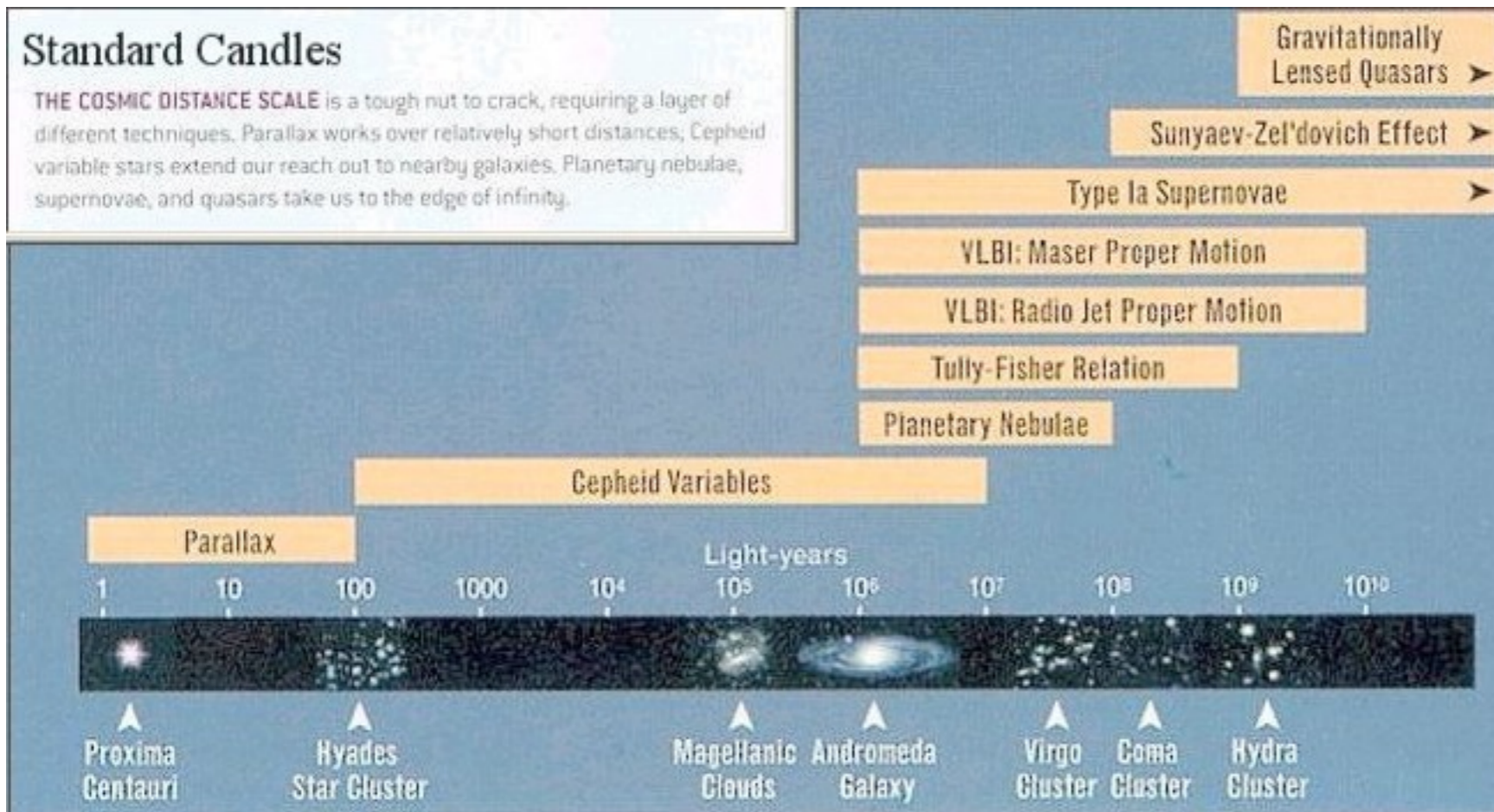
은하단: 수백개, 수천개의 은하들이 중력에 의하여 모여 있는 무리

초은하단: 은하단의 거대한 군집

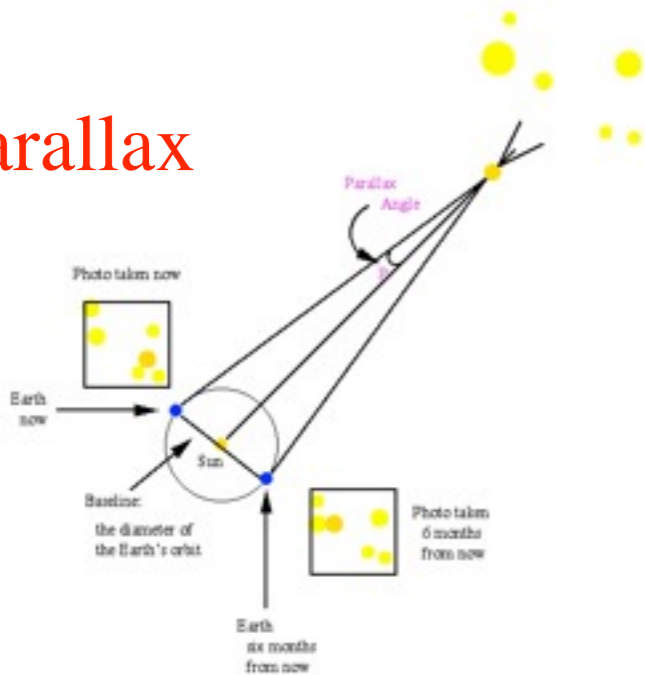


• To measure the distance : distance ladder

$$m = M - 97.5 + 5 \log D$$

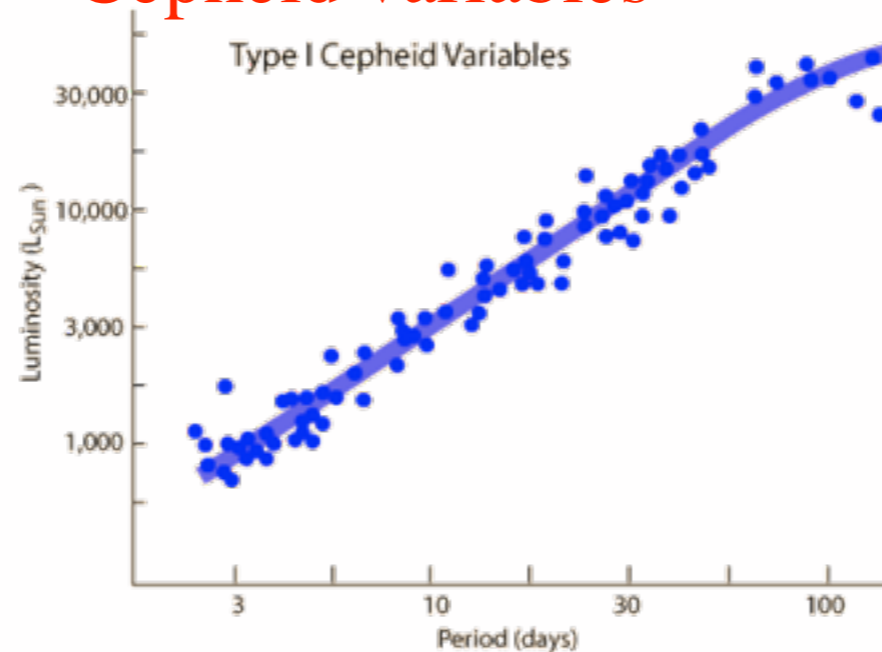


Parallax

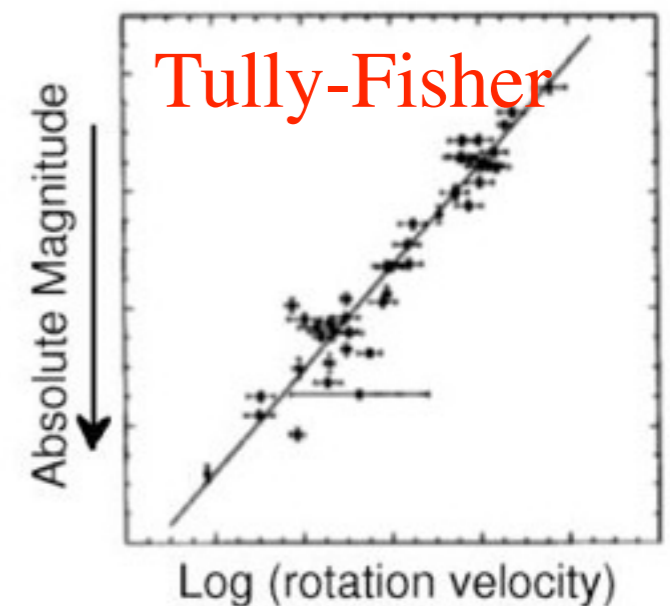


$$d[pc] = 1/p[arcsec]$$

Cepheid variables

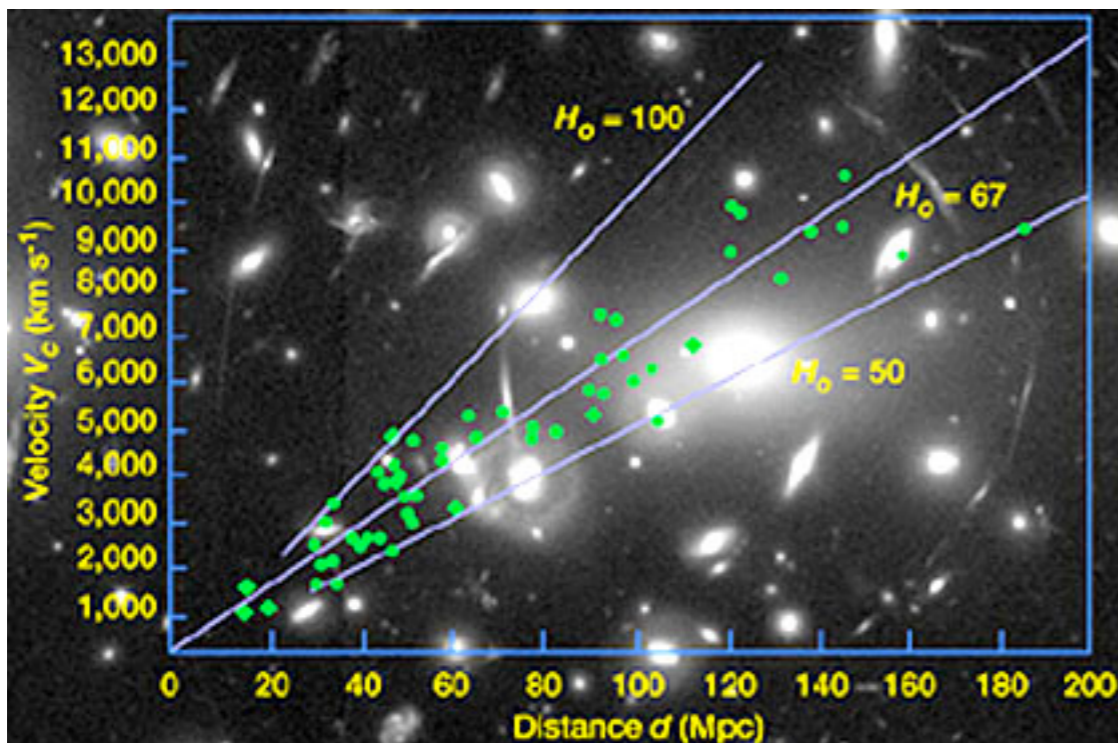


Tully-Fisher



허블의 법칙

은하들의 적색편이(후퇴속도)와 거리를 비교할 때, 멀리 있는 은하들의 적색편이가 더 크게 관측된다. 거리가 1 Mpc 증가할 때, 그 해당하는 속도가 약 70 km/sec 증가하는 것처럼 보인다. 이 비를 허블상수라고 한다.



허블의 법칙 (1929)

후퇴속도 거리

$$v(r) = H \times r$$

$$H = 70(\text{km/sec})/\text{Mpc}$$

허블상수(변수)

우주의 팽창이란?

실제로는 은하들이 주어진 속도로 멀어지는 것이 아니다.

은하는 주어진 좌표 상의 그 위치에 정지해 있더라도, 멀리 있는 은하와 관측자 사이의 공간이 팽창함으로 인하여, 빛의 파장이 길어지고, 그 결과로 도플러 효과가 생긴다.

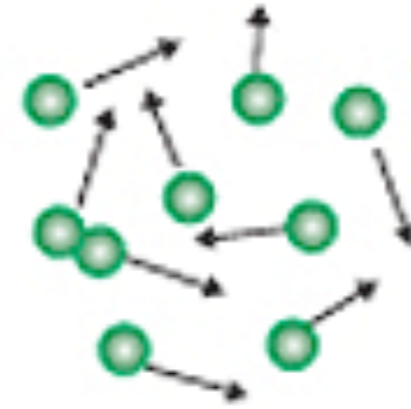
• 우주속 물질 상태의 진화

- atom, molecule
- nucleus
- electron

매우 차가운 거대 구조 형성



은하, 은하단



Gas

Recombination,
photon decoupling
: CMB

매우 뜨거운

쿼크, 글루온,
전자의 플라즈마

열적평형 상태

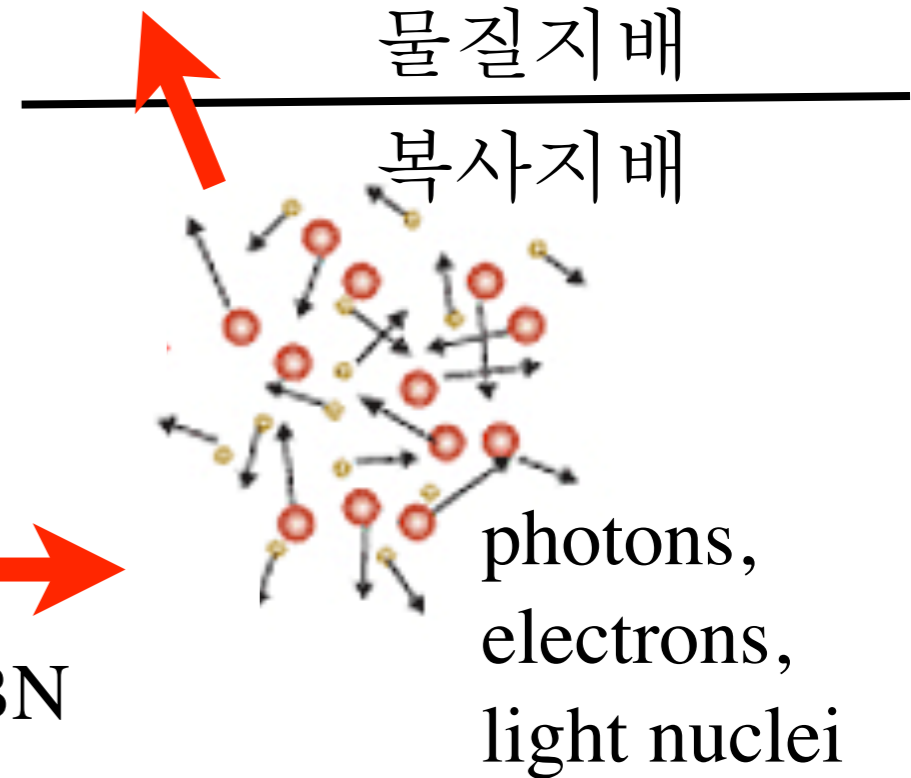
Quark-hadron transition



양성자, 중성자,
전자의 플라즈마



BBN

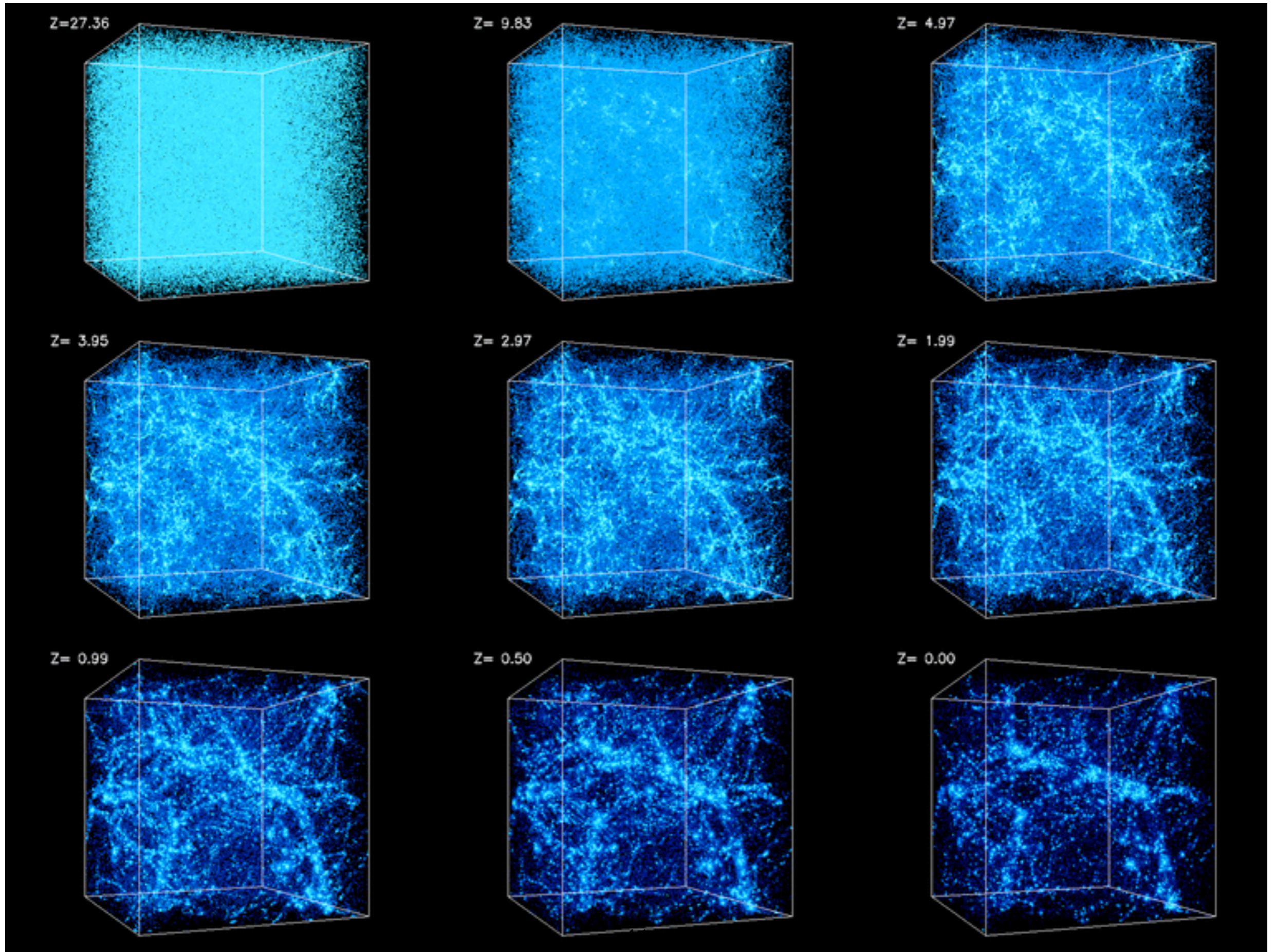


물질지배
복사지배

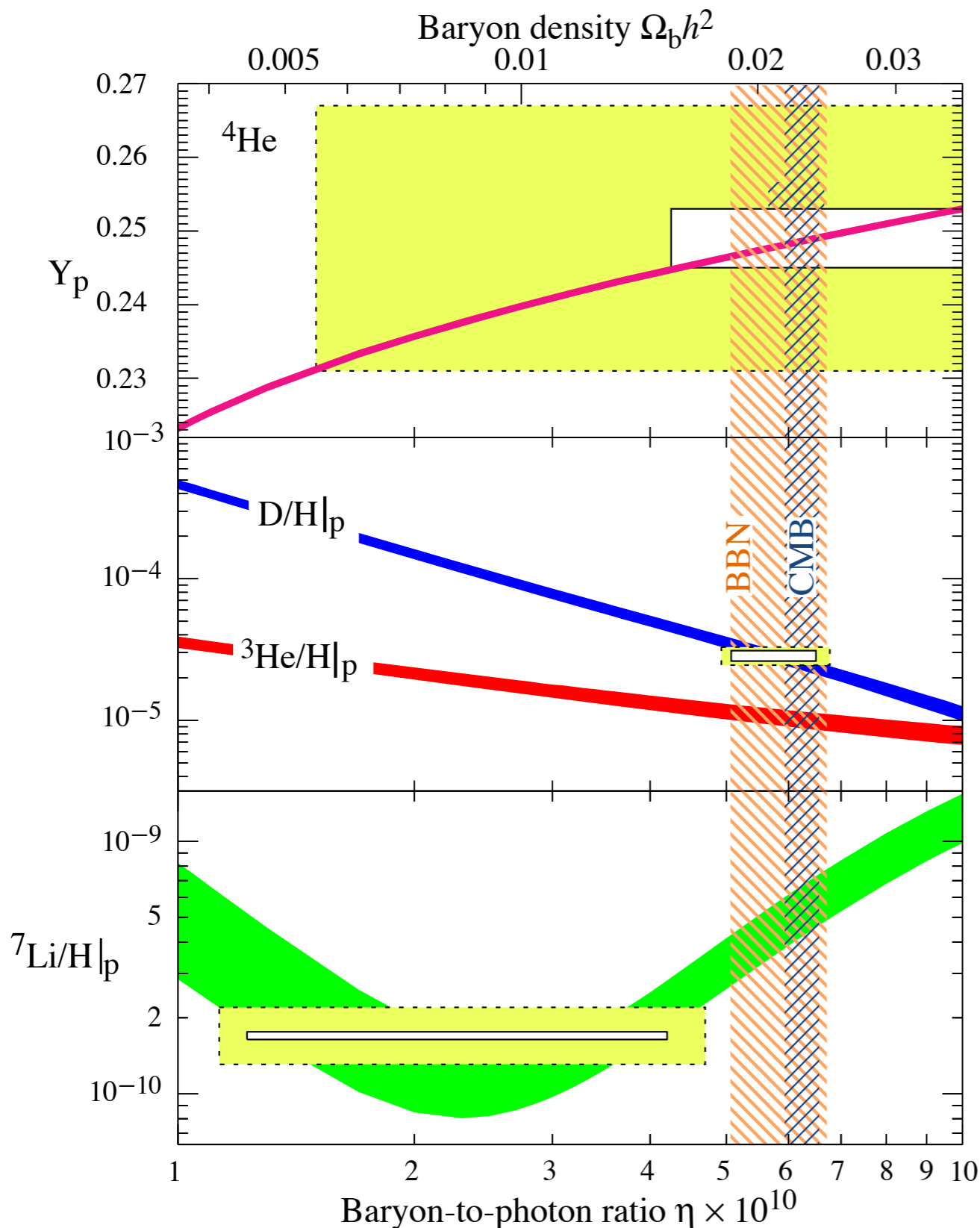
photons,
electrons,
light nuclei

● 물질의 진화 : 우주거대구조의 형성

43Mpc box



• Determination of Baryon density



Box: 2sigma stat, 2sigma stat + syst

The comparison between the observed light element abundances and the theoretical calculation shows that the **baryon-to-photon ratio**

$$\eta_{10} \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} \times 10^{10}$$

must be

$$5.1 \leq \eta_{10} \leq 6.5 \text{ (95\%CL)}$$

It corresponds to **Baryon energy density**

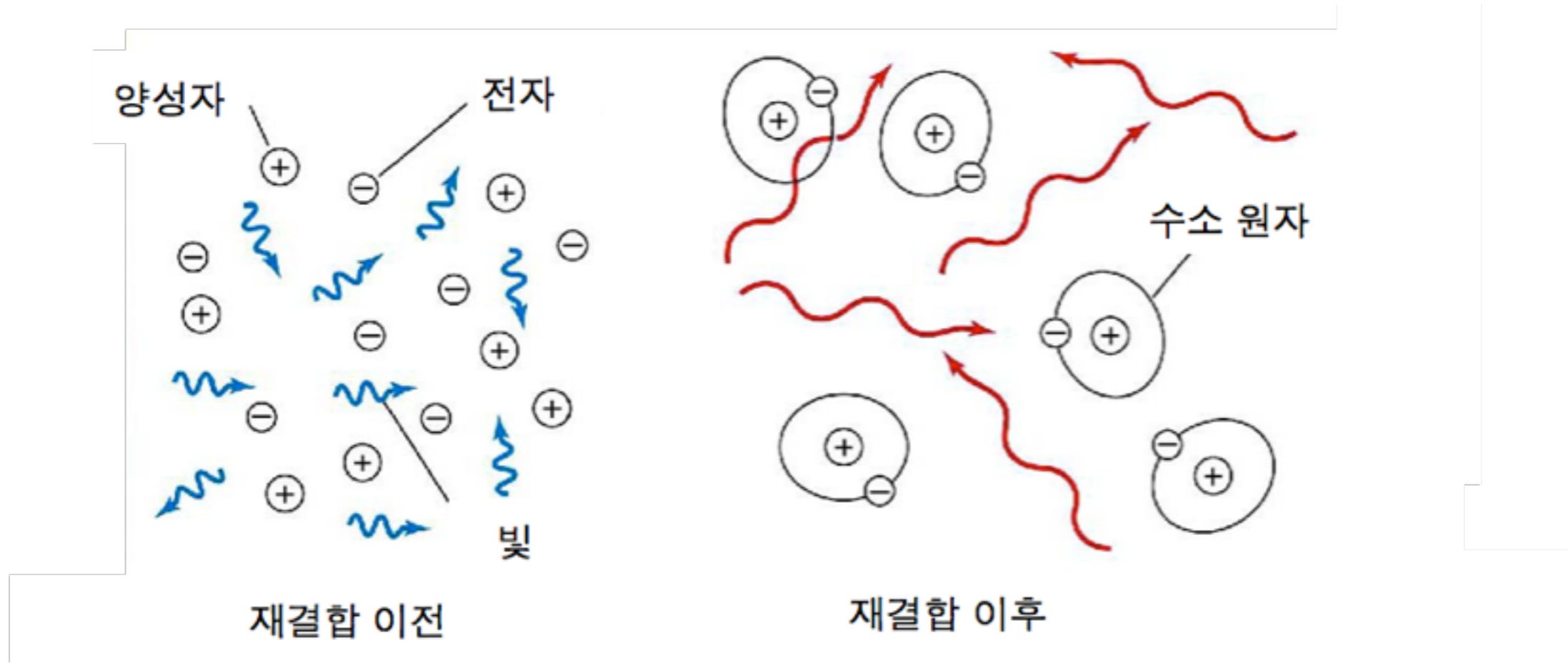
$$0.019 \leq \Omega_b h^2 \leq 0.024 \text{ (95\%CL)}$$

$$\text{cf) } \Omega h_{\text{lum}}^2 \simeq 0.0024$$

It is consistent with independent determination from CMB anisotropy.

$$\eta_{10} = 6.23 \pm 0.17$$

- 원자핵과 전자의 재결합 그리고 광자의 분리 (우주 나이 38 만년)
(Recombination and photon decoupling)



수소 원자핵과 전자의 결합 에너지 13.6 eV : 우주온도 약 3000 도
 자유로워진 광자는 아무런 충돌없이 진행하여 현재의 우리 주변을 채우고 있다.

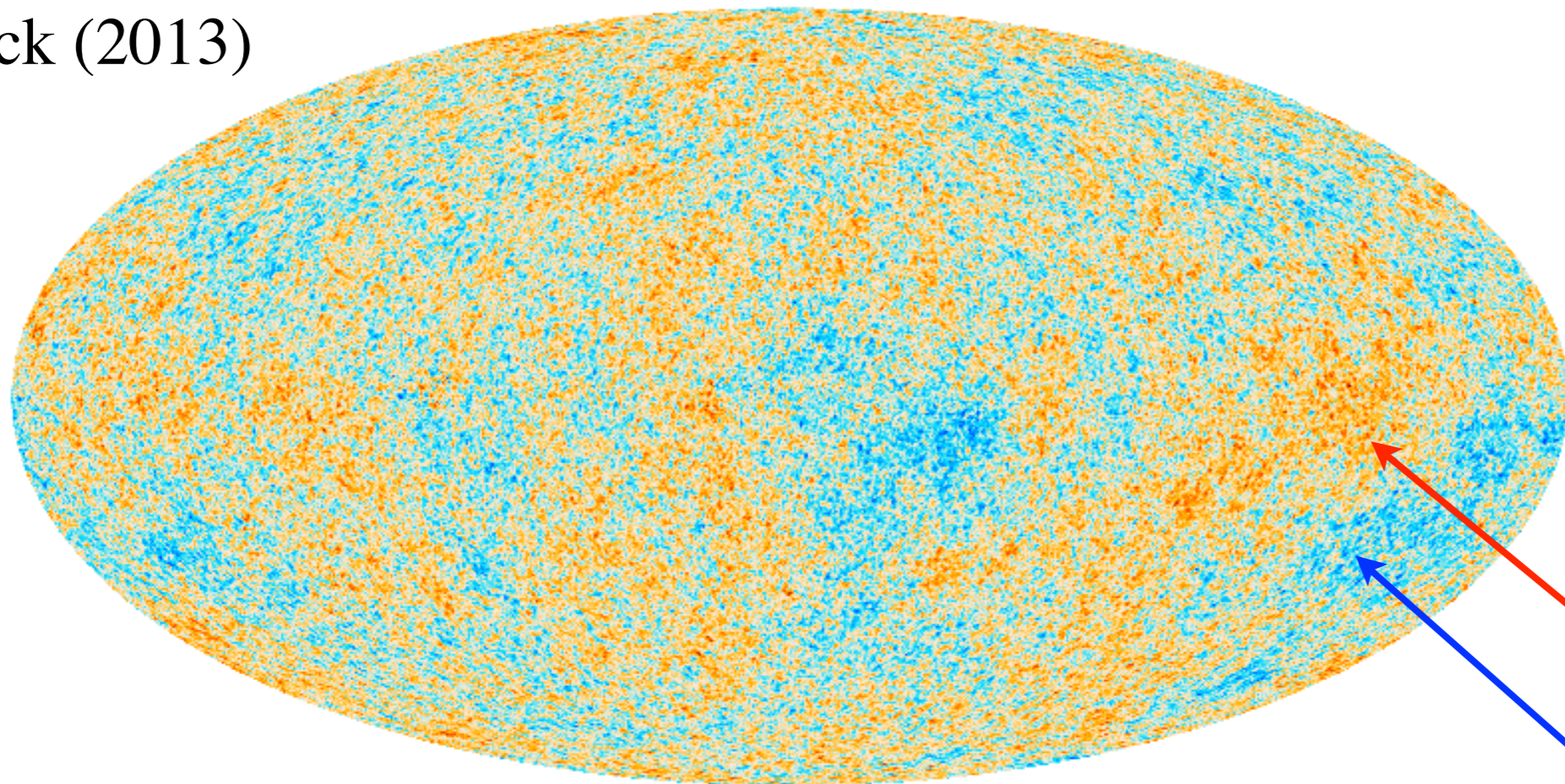


우주 배경 복사

: 우주 팽창에 의하여 온도가 줄어들어 지금은 2.7 도 정도가 됨
 (1948 년, 알퍼와 허먼이 예측하였다.)

- CMB 온도 비등방성

Planck (2013)



$$T_0 = 2.725K$$

$$T_0 + \mathcal{O}(10^{-5})K$$

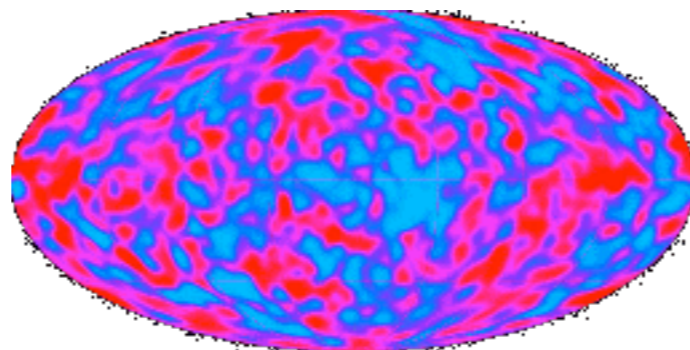
$$T_0 - \mathcal{O}(10^{-5})K$$

-500 500 μK_{CMB}

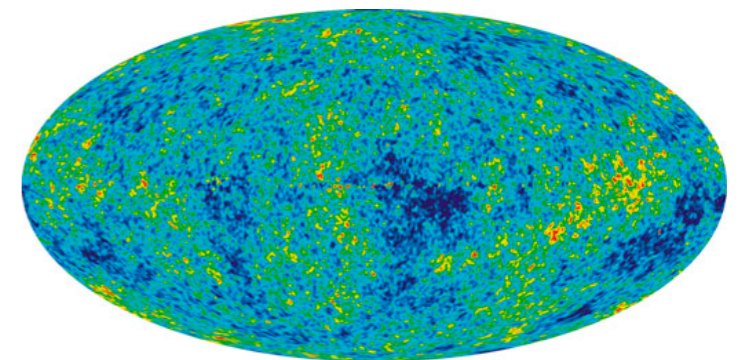
Penzias, Wilson (1965)



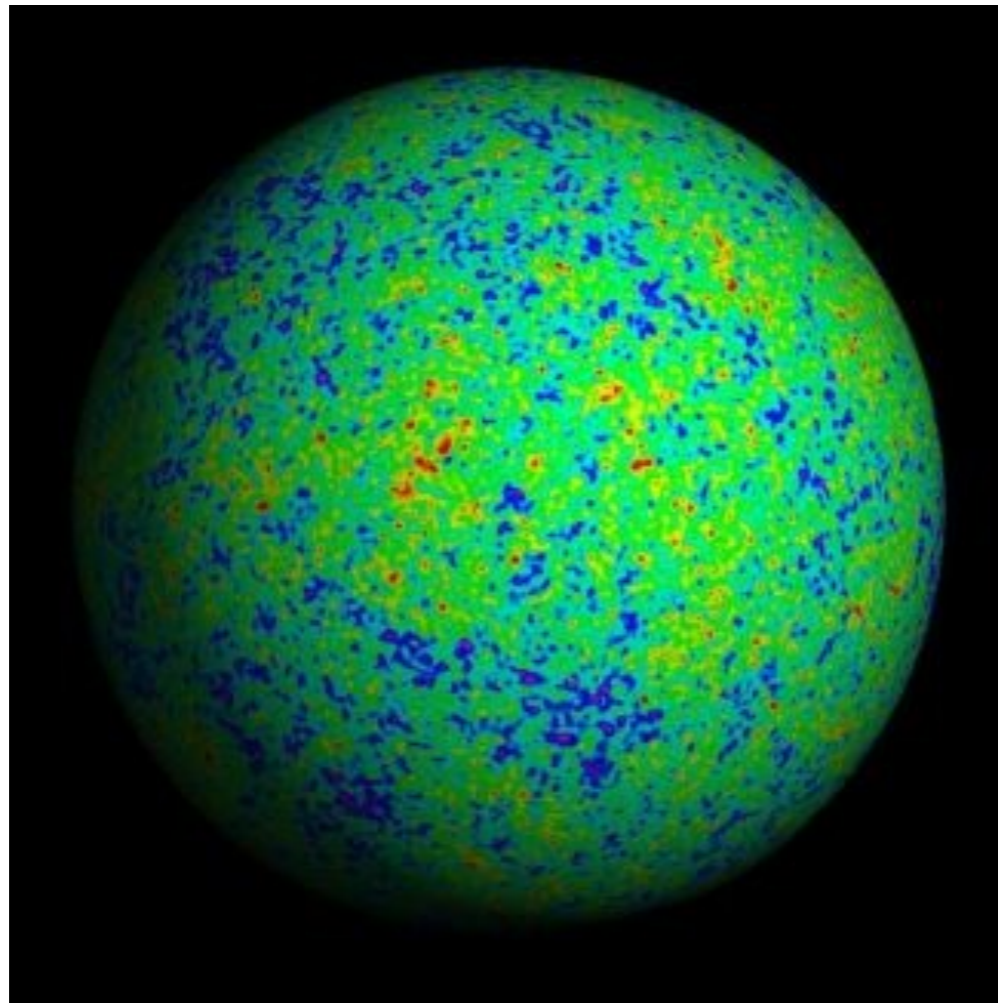
COBE (1992)



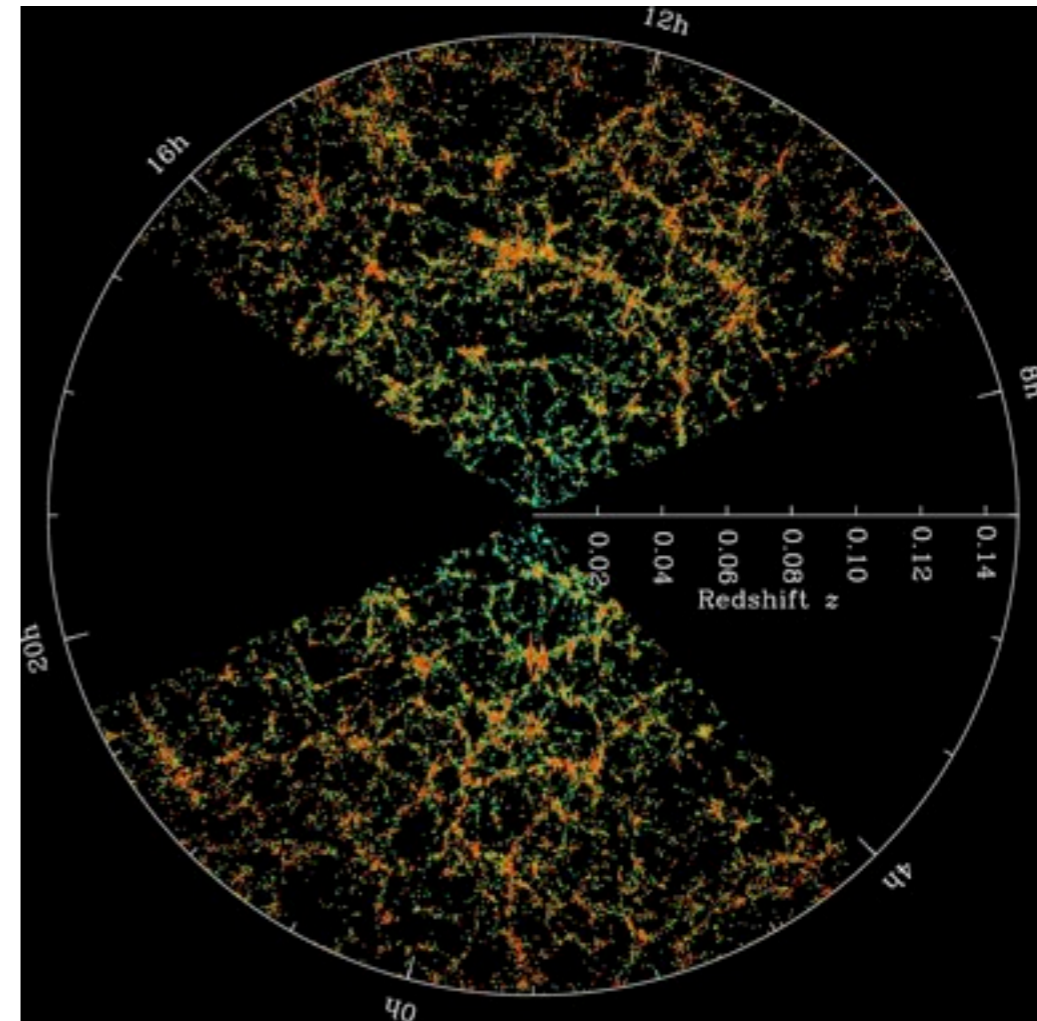
WMAP (2007)



우주배경 복사의 온도 분포



은하들의 분포



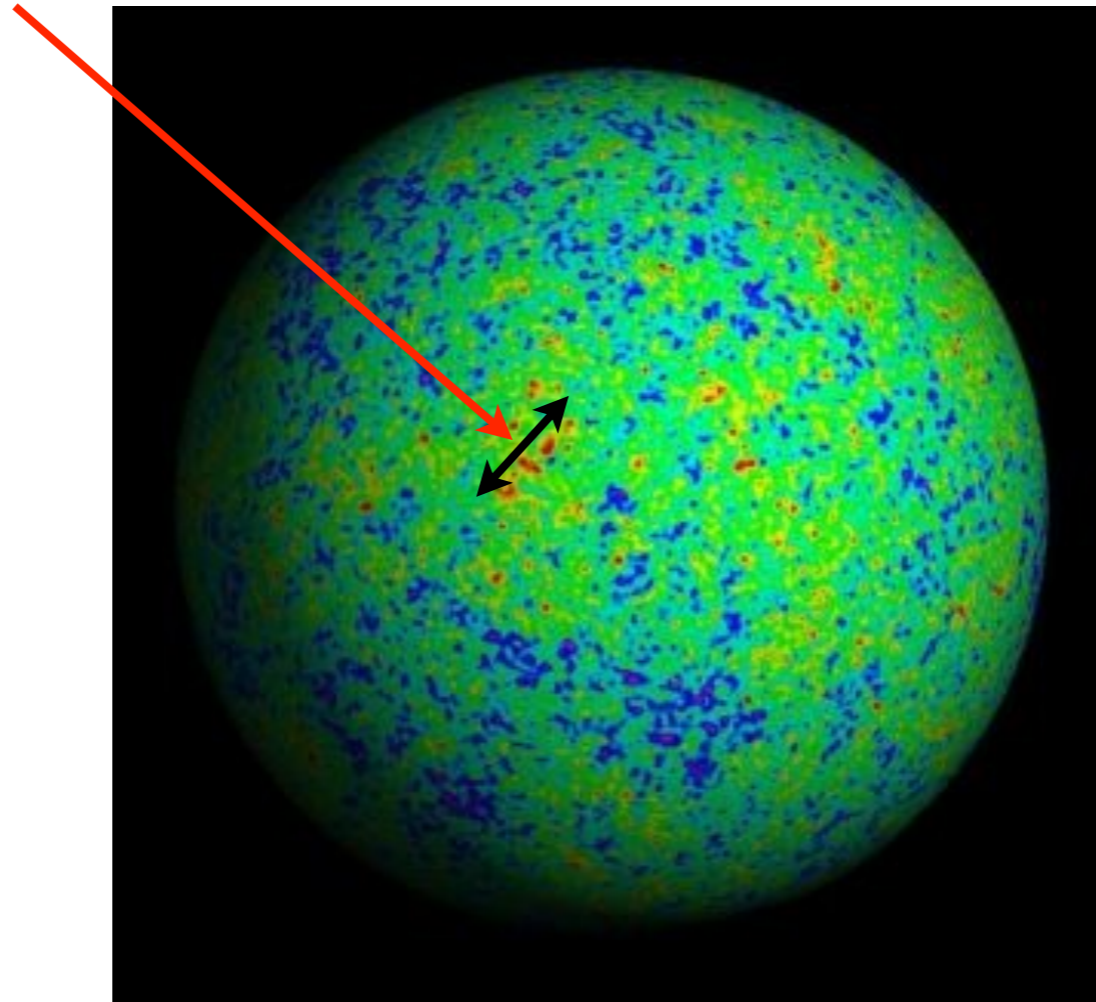
$l \gtrsim 10^2 \text{ Mpc}$ 에서 우주는 거의 균일하고 등방적이다.

$$\frac{\delta\rho(t, \mathbf{x})}{\rho_0(t)} \sim \frac{\delta T(t, \mathbf{x})}{T_0(t)} \sim 10^{-5}$$

왜 이렇게 비슷한가?

지평선 문제 (the horizon problem)

horizon size at the time of last scattering

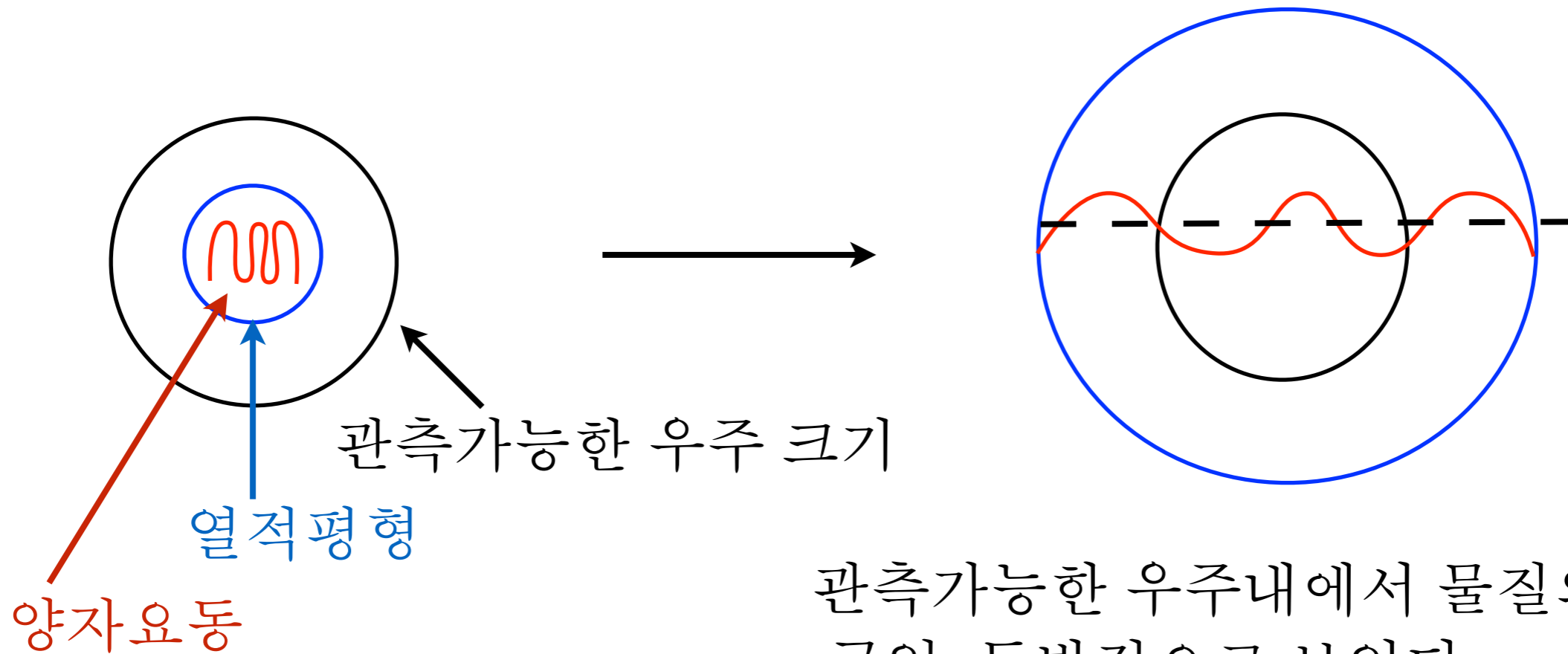


표준모형의 복사지배 또는 물질지배의 시대에서는 우주가 왜 그 정도로 균일하고 등방한지를 설명할 수 없다.

왜 인플레이션이 필요한가?

Flatness problem, horizon problem, Monopole problem, ...

우주의 급격한 팽창과 재가열에 의하여 위의 모든 것을 설명



관측가능한 우주내에서 물질의 분포는 균일, 등방적으로 보인다.

하지만 양자요동에 해당하는 비균일한 분포가 존재한다.

아인슈타인 방정식 $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

시공간의 구조와 물질밀도를 연결시키는 방정식

인플레이션기간동안 인플라톤 입자의 양자요동은 시공간의 요동을 일으킨다. (스칼라, 텐서 요동)

Metric perturbation

$$ds^2 = (1 + 2\phi)dt^2 - a^2[(1 - 2\psi)\delta_{ij} - h_{ij}]dx^i dx^j$$

스칼라 요동

밀도 섭동

$$\delta\rho(t, \mathbf{x})$$

텐서 요동

traceless, transverse $h^i_i = 0, h^i_{j,i} = 0,$

중력파 생성

- 온도섭동의 기원 : 스칼라요동

인플레이션

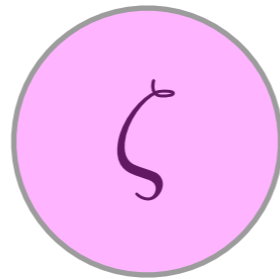
$$\delta\phi$$

인플라톤의 양자요동

$$\zeta = -\psi - H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}$$

$$\delta\rho \simeq \frac{dV}{d\phi} \delta\phi$$

초기 우주



curvature perturbation
: conserved if

$$p = p(\rho)$$

[Lyth, Malik, Sasaki, 2005]

우주배경복사

$$\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$$

CMB의 비등방성

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{5}\zeta \quad (\text{SW limit})$$

$$\mathcal{P}_\zeta \simeq \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 \sim 2 \times 10^{-9}$$

- 온도섭동의 기원 : **텐서요동**

인플레이션

$$h_{ij} \sim H$$

텐서요동

traceless, transverse

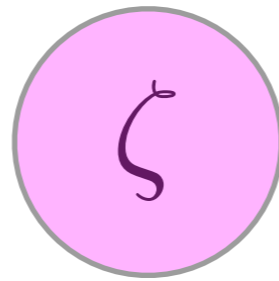
$$h_i^i = 0, \quad h_{j,i}^i = 0,$$

초기 우주



우주배경복사

$$\mathcal{P}_T = 8 \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2$$



curvature perturbation
: conserved

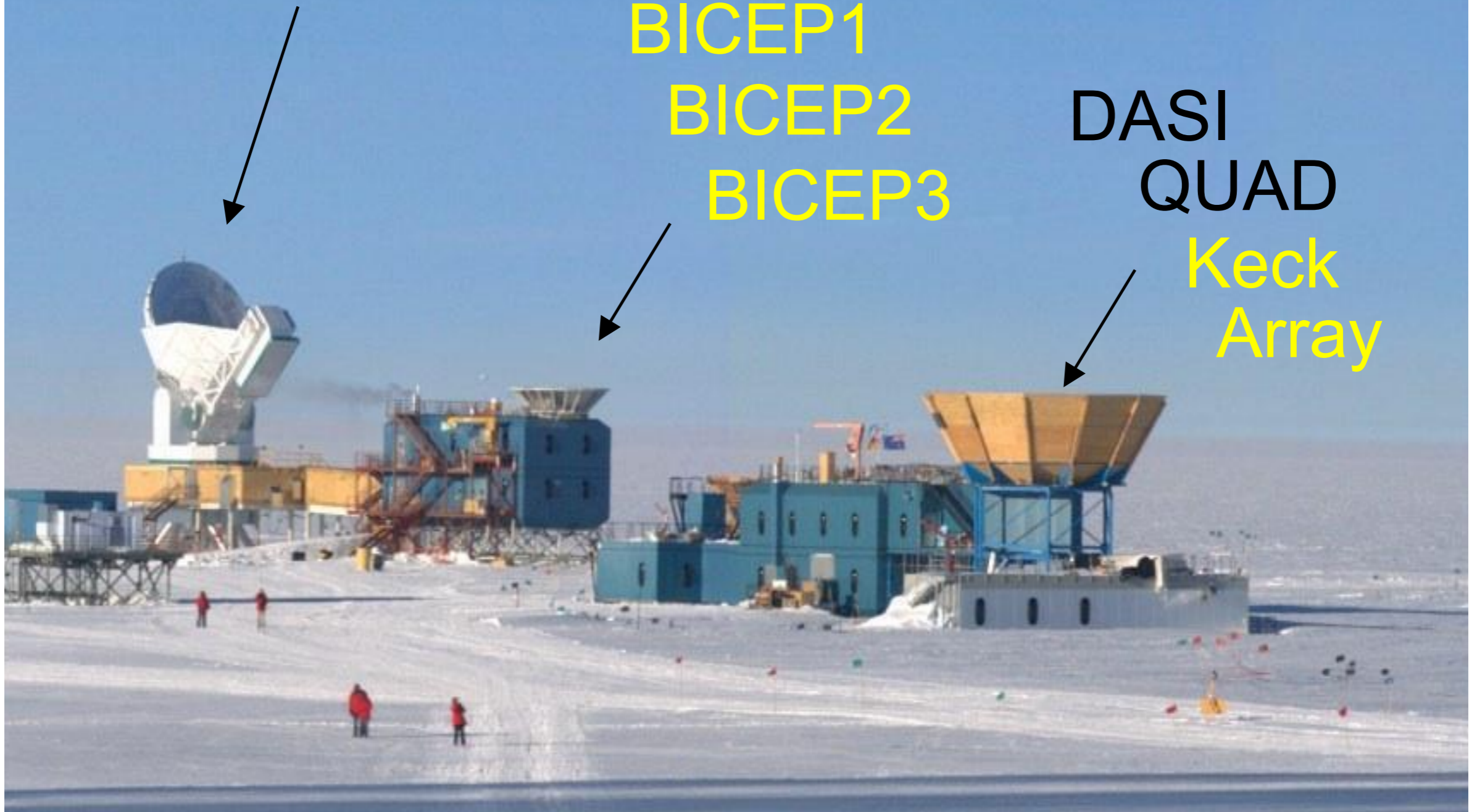
Tensor-to-scalar ratio

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_\zeta}$$

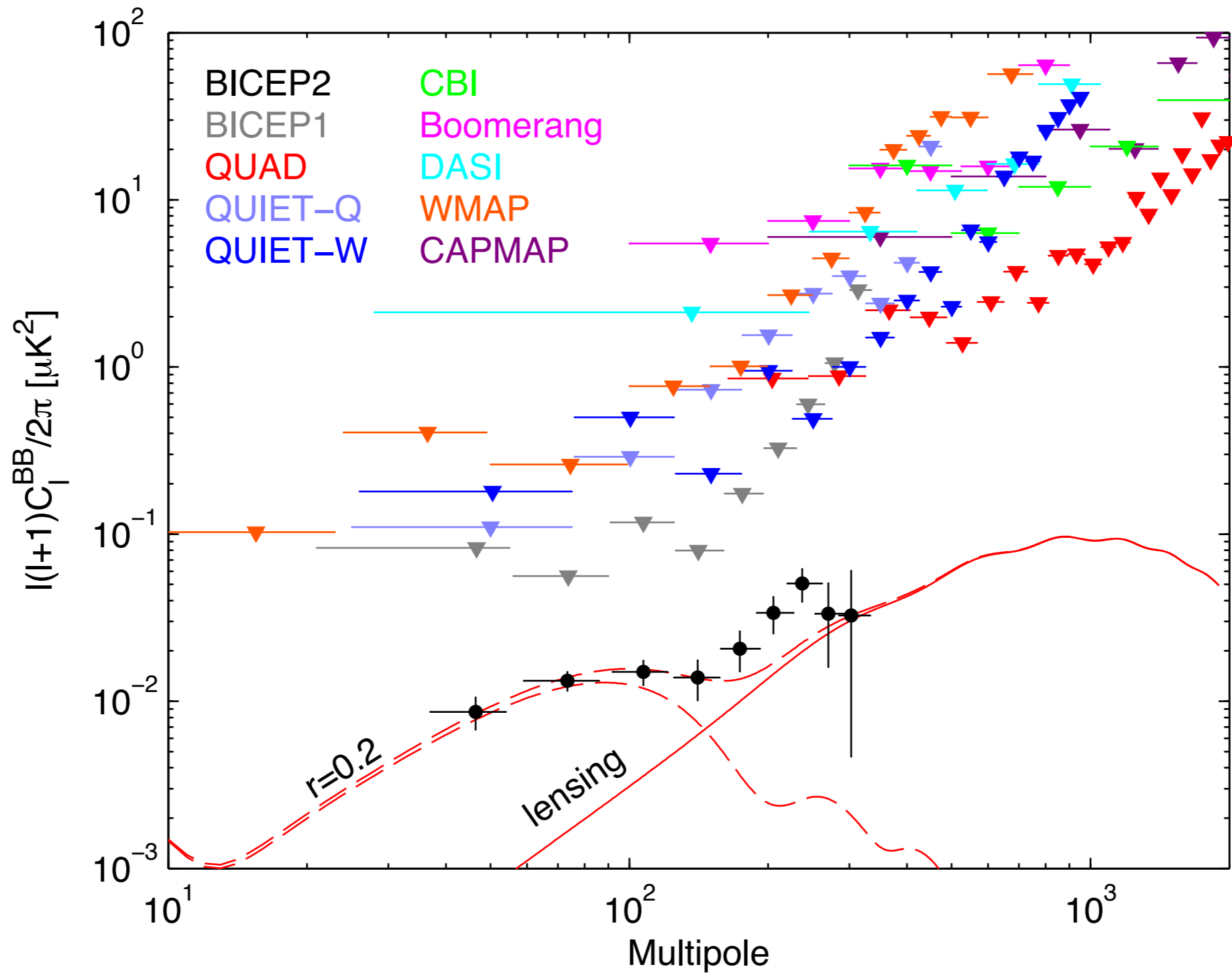
10m South Pole Telescope

BICEP1
BICEP2
BICEP3

DASI
QUAD
Keck
Array



BICEP2 : 텐서요동의 발견 ???



2. 빅뱅모형과 인플레이션



Open KIAS

Pyeong-Chang Summer Institute 2014

Alpensia Resort, August 24 - 30, 2014

- 표준 빅뱅 모형
- 문제점
- 인플레이션
- 인플레이션 모형

빅뱅 모형

상대성이론과 우주론

과학적인 근대 우주론은 아인슈타인의 1917년 논문에서 비롯된다고 할 수 있다. “일반상대론의 우주론적 고찰”

(Cosmological considerations of the general theory of relativity)

우주원리: 우주 공간은 어디서 보나 같다, 즉 특별한 방향도 없고 밀도도 균등하다. (큰 거리 영역에서)

일반상대론 + 우주원리



프리드만 방정식

공간의 기하학적구조와 물질사이의 관계

- 일반상대론과 아인슈타인 방정식


Einstein eq.

중력 = 시공간의 휘어짐

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

물질의 분포

Friedmann eq.


$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho$$



우주의 팽창과 구조



물질의 양

Kinematics

표준빅뱅모형: 일반상대론

빅뱅우주론: 균일하고 등방적인 우주를 가정하고 팽창하는 우주를 설명

Friedmann-Robertson-Walker metric

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}$$

$R(t)$: scale factor

$k > 0$ closed, $k = 0$ flat, $k < 0$ open

* 우주의 전체적인 모양과 구조는 알지 못하며, 위 방정식은 관측 주변에 국부적으로 적용된다.

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}$$

$R(t)$: scale factor

1. 우주의 변화: scale factor, redshift

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \equiv 1 + z$$

2. 운동량 감소

$$P(t) \propto \frac{1}{R(t)}$$

Robertson-Walker metric (4차원 시공간)

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}$$

Comoving distance : 고정된 좌표사이의 거리, 팽창해도 변하지 않음.

Proper distance 시간 t 에서의 물리적인 거리

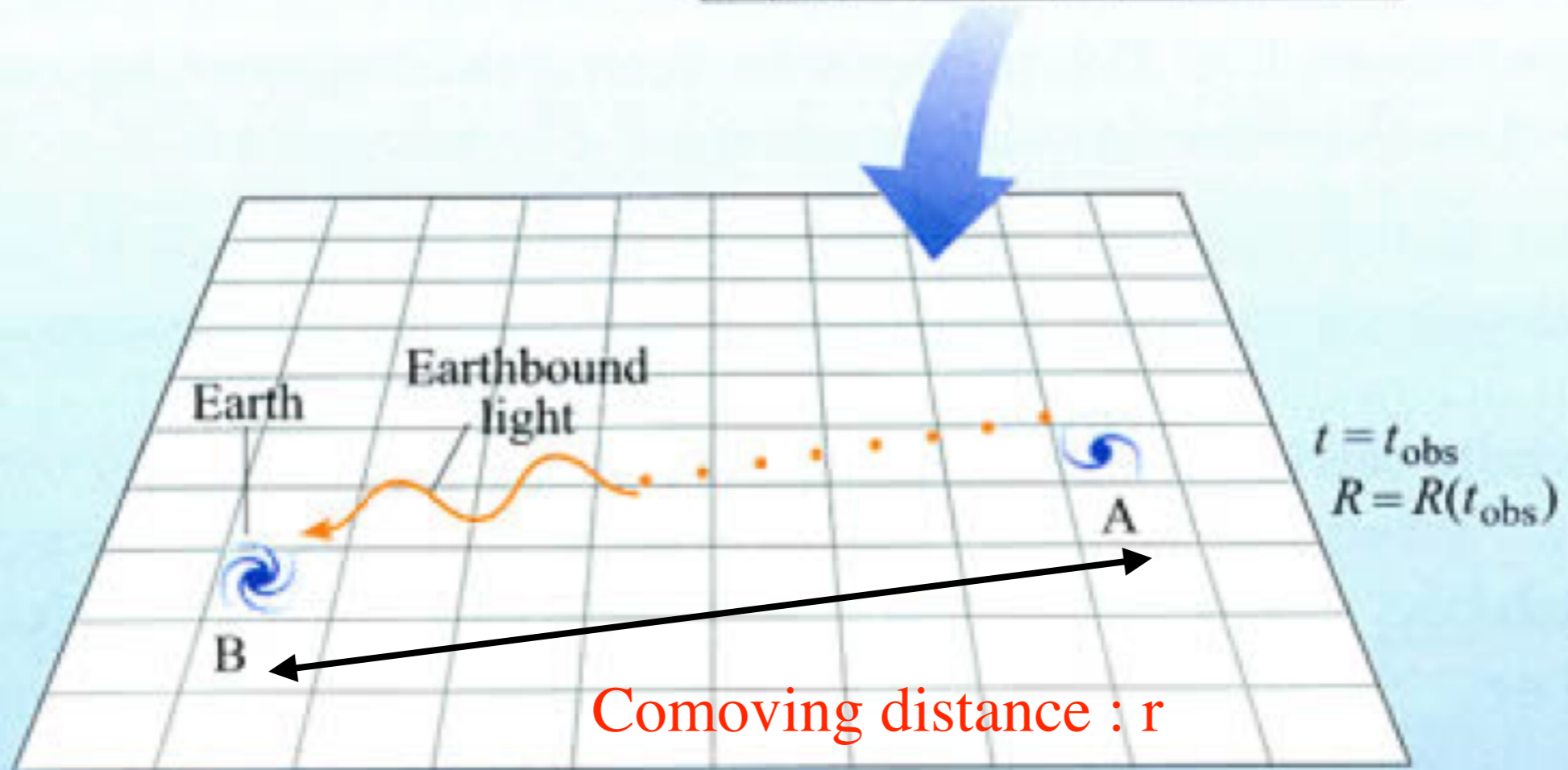
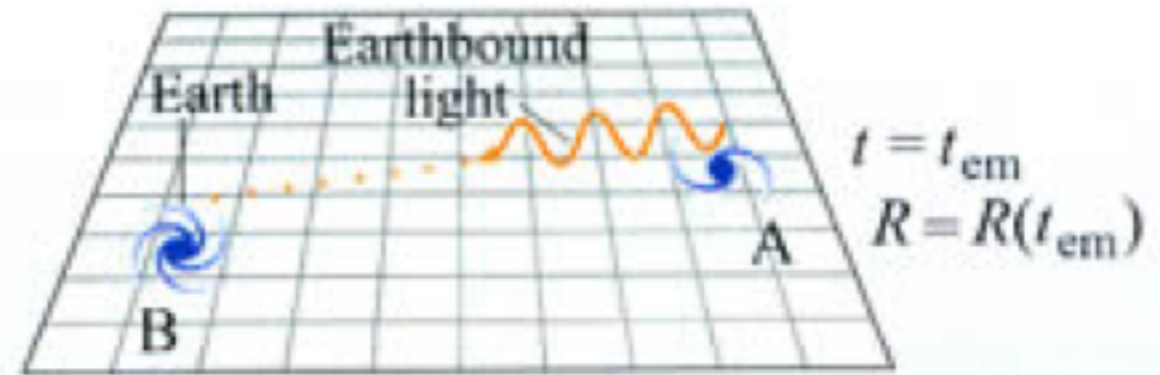
예) $dt = d\theta = d\phi = 0$

$$d(r, t) = \int ds = R(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = R(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r & k = +1 \\ r & k = 0 \\ \sinh^{-1} r & k = -1 \end{cases}$$

The proper distance between two co-moving objects is proportional to the **scale factor** $R(t)$. The rate of change of the proper distance is just

$$\dot{d} = d \frac{\dot{R}}{R}$$

우주의 팽창과 적색편이



Comoving distance : r
Proper distance : $R(t) r$

Particle horizon : 유한한 우주의 시간내에 빛이 이동할 수 있는 최대한의 거리. 그 바깥의 공간은 아직 한 번도 도달할 수 없었던 영역.

우주 팽창의 과정에 따라, 유한할 수도 무한할 수도 있다.

$$d_p(t) = \int_0^{r_p} \frac{R(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')}$$

geodesic of light

$$ds^2 = 0$$



$$\int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{r_p} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$



Total comoving distance r_p : light have traveled since $t=0$

프리드만 방정식

- **Dynamics** : scale factor 의 시간에 따른 변화

아인슈타인 방정식

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Einstein 텐서
geometry : RW metric

from $g^{\mu\nu}$

Energy-Momentum 텐서
matter in the Universe, perfect fluid

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$$

$$g_{\mu\nu} = (1, -R^2(t), -R^2(t), -R^2(t))$$

$$g^{\mu\nu} = (1, -R^{-2}(t), R^{-2}(t), -R^{-2}(t))$$

Perfect fluid

: completely characterized by its rest frame energy density and isotropic pressure

$$T_{00} = \rho, \quad T_{0i} = T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = \delta_{ij}p$$

In a general gravitational field and in the frame with velocity,

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu} \quad \text{with } g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = +1$$

The energy momentum tensor should be this form in the zeroth order due to the translational and rotational invariance.

Energy momentum conservation

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0 . \quad \longrightarrow \quad T^{\mu\nu}_{; \nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\kappa\nu}^{\mu} T^{\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\nu}^{\nu} T^{\mu\kappa} = 0$$

w/o gravity

in the presence of gravitational field

$$\begin{aligned}
0 = \nabla_{\mu} T^{0\mu} &= \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} T^{0\nu} \\
&= \frac{d\rho}{dt} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} + \Gamma_{i0}^i T^{00} \\
&= \frac{d\rho}{dt} - \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} T^{ij} + 3 \frac{\dot{a}}{a} T^{00} \\
&= \frac{d\rho}{dt} + 3 \frac{\dot{a}}{a} p + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho
\end{aligned}$$

Non-vanishing components of affine connections

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R} h_{ij}$$

$$h_{ij} = -g_{ij}$$

$$\Gamma_{oj}^i = \frac{\dot{R}}{R} \delta_j^i$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{il} (h_{lj,k} + h_{lk,j} - h_{jk,l})$$

Energy-momentum conservation:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad \xrightarrow{\mu=0}$$

Continuity equation

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (\text{Eq. I})$$

$$\text{or } d(\rho R^3) = -pd(R^3)$$

with equation of state

$$p = p(\rho)$$

Radiation

$$(p = \frac{1}{3}\rho)$$

(Cold) Matter

$$(p = 0)$$

Vacuum energy

(cosmological constant)

$$(p = -\rho)$$

To know how R changes, we need to solve Einstein equation, with

Einstein tensor

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu}$$

With FRW metric,

$$g_{00} = 1$$

$$g_{0i} = 0$$

$$g_{ij} = -R^2(t) \left(\delta_{ij} + k \frac{x^i x^j}{1 - k\vec{x}^2} \right)$$

Ricci tensor $R_{00} = -3 \frac{\ddot{R}}{R}$

$$R_{ij} = - \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \right] g_{ij}$$

Ricci scalar $\mathcal{R} = -6 \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right]$

gives $G_{00} = 3 \left[\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right]$

$$G_{ij} = \left[2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right] g_{ij}$$

and **Energy momentum tensor**

$$T_{00} = g_{0\alpha} T_0^\alpha = \rho$$

$$T_{ii} = g_{i\alpha} T_i^\alpha = g_{ii} T_i^i = g_{ii}(-p)$$

gives (0,0) component in the zero-th order : **Friedmann equation**

$$H \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$$

$$\boxed{H^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho} \quad (\text{Eq.2})$$

gives (i,i) component in the zero-th order

$$\boxed{2\frac{\ddot{R}}{R} + H^2 + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p} \quad (\text{Eq.3})$$

The difference gives

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p)$$

for $k=1$

$$q_0 \equiv -\frac{1}{H_0^2} \frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)} = \Omega_0 \frac{1+3\omega}{2}$$

Eqs. 1, 2, 3 are connected by Bianchi identities and only two are independent.
Usually Eqs. 1 and 2 are taken.

프리드만 방정식

Hubble parameter $H \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$

$$H^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

우주의 팽창과 구조

우주내의 물질

에너지-운동량 보존

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$



$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$$

상태방정식

$$p = p(\rho)$$

임계밀도(Critical density)

Friedmann 방정식 $\frac{k}{R^2 H^2} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} - 1 \equiv \Omega - 1$

임계밀도 $\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$

밀도변수 $\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}$ 전체 합 $\Omega = \sum_i \Omega_i = \frac{\sum_i \rho_i}{\rho_c}$

국부적인 우주공간의 기하학적 모양은 밀도에 의하여 결정

Closed $k > 0, \quad \Omega > 1$

Flat $k = 0, \quad \Omega = 1$

Open $k < 0, \quad \Omega < 1$

Many kinds of matter content of our interest can be described by a simple eq. of state

$$p = \omega \rho$$

We can solve the continuity equation,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}(1 + \omega)\rho = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{dR}{R}$$

$$\log \frac{\rho}{\rho_0} = -3(1 + \omega) \log \frac{R}{R_0}$$

$$\rho(t) = \rho(t_0) \left(\frac{R(t)}{R(t_0)} \right)^{-3(1+\omega)}$$

Many kinds of matter content of our interest can be described by a simple eq. of state

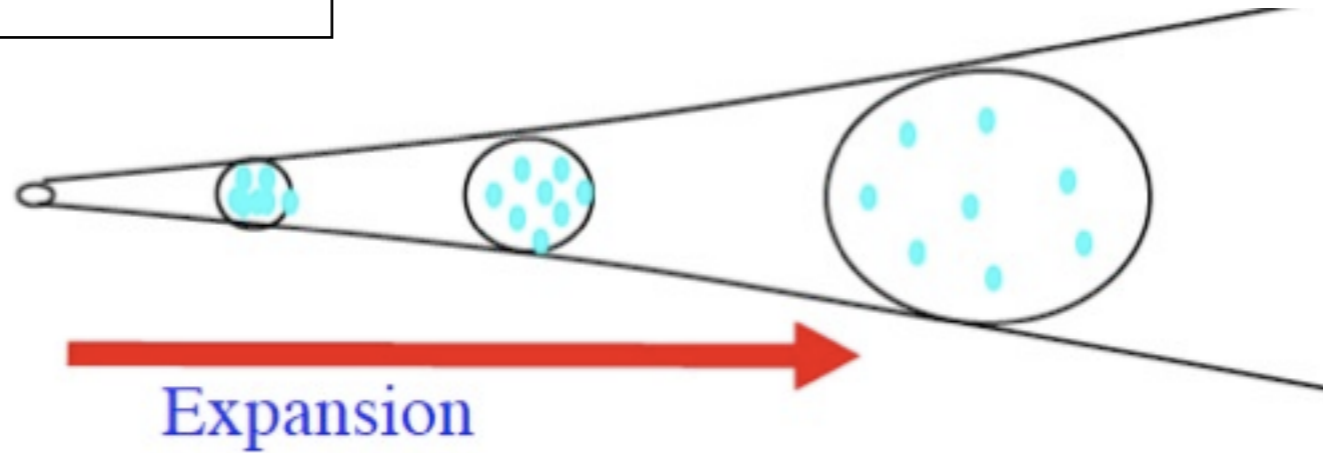
$$p = \omega \rho$$

w 가 상수일 경우, 방정식은 쉽게 풀 수 있다.

$$\rho \propto R^{-3(1+\omega)} \left(\begin{array}{ll} \rho \propto R^{-4} & \text{Radiation} \quad (p = \frac{1}{3}\rho) \\ \rho \propto R^{-3} & \text{(Cold) Matter} \quad (p = 0) \\ \rho \propto \text{const} & \text{Vacuum energy} \quad (p = -\rho) \\ & \text{(cosmological constant)} \end{array} \right)$$

These apply separately for coexisting radiation, matter and cosmological constant, if there is no interactions between them.

팽창하는 우주에서



상대적인 부피의 증가에 따라, 자유입자들의

1. 단위부피당 개수가 감소 : $n(t) \propto \frac{1}{R^3(t)}$

2. 운동량 감소 : $P(t) \propto \frac{1}{R(t)}$

에너지 밀도의 감소



상대론적 물질 ($E \gg m$)

$$\rho_r \sim E(t) n(t) \propto R(t)^{-4}$$

비상대론적 물질 ($E \ll m$)

$$\rho_m \sim M n(t) \propto R(t)^{-3}$$

We can solve Friedmann equation with given matter type

For $k=0$ (flat), and $p = \omega\rho$ \longrightarrow $\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$ $\rho \propto R^{-3(1+\omega)}$

we obtain $R \propto t^{2/3(1+\omega)}$ \longleftarrow \longrightarrow $H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{2}{3(1+\omega)} \frac{1}{t}$

Radiation ($p = \frac{1}{3}\rho$)

$$R \propto t^{1/2}$$

Matter ($p = 0$)

$$R \propto t^{2/3}$$

Vacuum energy

$$(p = -\rho)$$

$$R \propto \exp(Ht)$$

$\rho \propto R^{-4}$ Radiation

$\rho \propto R^{-3}$ (Cold) Matter

$\rho \propto \text{const}$ Vacuum energy

At present time,

$$\rho_R^0 = 5 \times 10^{-5} \rho_c^0$$

$$\rho_M^0 = \rho_{DM}^0 + \rho_B^0 = 0.26 \rho_c^0$$

$$\rho_{vac}^0 = 0.74 \rho_c^0$$

$$\rho \propto R^{-4} \quad \text{Radiation}$$

$$\rho \propto R^{-3} \quad \text{(Cold) Matter}$$

$$\rho \propto \text{const} \quad \text{Vacuum energy}$$

At present time,

$$\rho_R^0 = 5 \times 10^{-5} \rho_c^0$$

$$\rho_M^0 = \rho_{DM}^0 + \rho_B^0 = 0.26 \rho_c^0$$

$$\rho_{vac}^0 = 0.74 \rho_c^0$$

We can go backward in time with values at present.

Matter density = Vacuum density at

$$\rho_M = \rho_M^0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3} = \rho_v = \rho_v^0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1+z} = \frac{R}{R_0} = \left(\frac{0.74}{0.26} \right)^{-1/3} \simeq 0.7$$

$$\text{or } z \simeq 0.4$$

Why does the Vacuum energy dominates recently?

Coincidence problem

$$\rho \propto R^{-4} \quad \text{Radiation}$$

$$\rho \propto R^{-3} \quad \text{(Cold) Matter}$$

$$\rho \propto \text{const} \quad \text{Vacuum energy}$$

At present time,

$$\rho_R^0 = 5 \times 10^{-5} \rho_c^0$$

$$\rho_M^0 = \rho_{DM}^0 + \rho_B^0 = 0.26 \rho_c^0$$

$$\rho_{vac}^0 = 0.74 \rho_c^0$$

$$z_{eq} \simeq 3200 \quad (70,000 \text{ years})$$

$$\rho \propto R^{-4} \quad \text{Radiation}$$

$$\rho \propto R^{-3} \quad \text{(Cold) Matter}$$

$$\rho \propto \text{const} \quad \text{Vacuum energy}$$

At present time,

$$\rho_R^0 = 5 \times 10^{-5} \rho_c^0$$

$$\rho_M^0 = \rho_{DM}^0 + \rho_B^0 = 0.26 \rho_c^0$$

$$\rho_{vac}^0 = 0.74 \rho_c^0$$

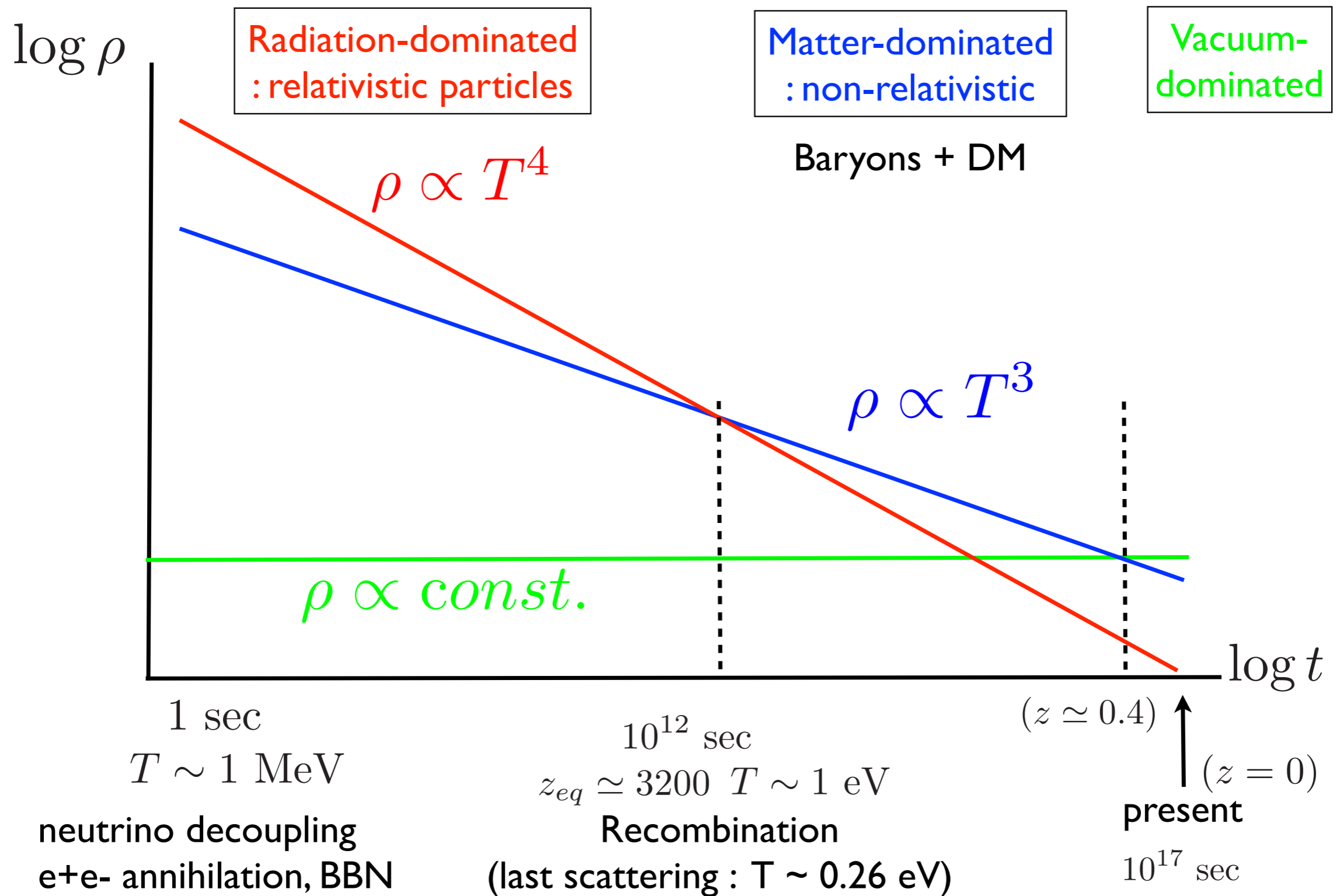
Radiation density = Matter density at

$$\left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} = \frac{\rho_M^0}{\rho_R^0} = \frac{0.26}{5 \times 10^{-5}} \simeq 5000 = 1 + z$$

If we include neutrino in the relativistic particles,

$$z_{eq} \simeq 3200 \quad (70,000 \text{ years})$$

- Evolution of energy density



• 열적 평형상태

In the **non-expanding** Universe,
with infinite of time, the system leads to the thermal equilibrium.

Thermal equilibrium: Kinetic eq. + Chemical eq.



by elastic scattering
: changes energy and reshape
the distribution function
to Fermi-Dirac for fermions and
Bose-Einstein for bosons



by inelastic scattering
: changes numbers of the
species and satisfy
between chemical potentials

$$\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D$$

In thermal equilibrium the entropy is maximized and constant.

Thermal equilibrium:

phase distribution function $f(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{1}{\exp((\mathbf{E} - \mu)/\mathbf{T}) \pm 1}$

$$E^2 = |\vec{\mathbf{p}}|^2 + m^2$$

μ : chemical potential

Fermi-Dirac for fermions: +1

Bose-Einstein for bosons: -1

number density $n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\tilde{\mathbf{p}}) d^3 \mathbf{p}$

energy density $\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\tilde{\mathbf{p}}) f(\tilde{\mathbf{p}}) d^3 \mathbf{p}$

pressure $p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{\mathbf{p}}|^2}{3E} f(\tilde{\mathbf{p}}) d^3 \mathbf{p}$

g : internal degrees of freedom

$$d^3p = p^2 dp d\Omega = 4\pi \sqrt{E^2 - m^2} E dE$$

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1} E dE$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1} E^2 dE$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1} dE$$

Riemann zeta function

$$\zeta(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) = 1.202 \dots$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

In the relativistic limit (at high temperature), **Radiation-like**

$$p = \frac{\rho}{3}$$

$(m \ll T)$, for $\mu \ll T$

Bose $\rho = \frac{\pi^2}{30} g T^4$ $n = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3$ $\langle E \rangle \equiv \frac{\rho}{n} = \frac{\pi^4}{30 \zeta(3)} T \simeq 2.701 T$

Fermi $\rho = \frac{7}{8} \left(\frac{\pi^2}{30} \right) g T^4$ $n = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3$ $\langle E \rangle = \frac{7 \pi^4}{180 \zeta(3)} T \simeq 3.151 T$

In the non-relativistic limit (at low temperature), **Matter-like**

$m \gg T$, Boltzmann suppressed,

For both Bose and Fermi

$$\rho = mn \quad n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} \quad \langle E \rangle = m + \frac{3}{2} T$$

$$p = nT \ll \rho$$

Asymmetry

When the complex fields have non-vanishing chemical potential with opposite sign to their antiparticle, ($\mu_+ = -\mu_-$)

$$\begin{aligned}n_+ - n_- &= \frac{g}{2\pi^3} \int_m^\infty (E^2 - m^2)^{1/2} E dE \left[\frac{1}{1 + \exp[(E - \mu)/T]} - \frac{1}{1 + \exp[(E + \mu)/T]} \right] \\ &\simeq \frac{gT^3}{6\pi^2} \left[\pi^2 \left(\frac{\mu}{T} \right) + \left(\frac{\mu}{T} \right)^3 \right] \quad (T \gg m) \\ &\simeq 2g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \sinh\left(\frac{\mu}{T}\right) \exp\left(-\frac{m}{T}\right) \quad (T \ll m)\end{aligned}$$

Baryons : non-vanishing asymmetry (Baryogenesis)

$$\eta \equiv \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \simeq 6 \times 10^{-10}$$

Electrons and positrons

The asymmetry is the same as that of baryon due to the charge neutrality.

Neutrinos

It can be large in principle and contribute to the cosmic energy density.

Total Energy density: sum of all species of particles

Neglecting the small contribution from non-relativistic particles, we obtain the approximate, but good and convenient expressions.

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \qquad p_R = \frac{1}{3} \rho_R = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4$$

Effective degrees of freedom, for species $m_i \ll T$

$$g_* = \sum_{\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4$$

The temperatures of different particles can be different in general. For example, after neutrino decoupling and electron-positron annihilations,

$$\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} = 1.401$$

Total entropy density

Neglecting the small contribution from non-relativistic particles, we obtain the approximate, but good and convenient expressions.

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3$$

where

$$g_{*s} = \sum_{\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3$$

Compared to the photon number density $n = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3$

there is a relation

$$s = 1.80 g_{*S} n_\gamma \qquad s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3$$

and today

$$s = 7.04 n_\gamma \qquad \text{with} \qquad g_{*S} = 3.91$$

Entropy is conserved in the comoving volume,

$$s(T) R^3 = \text{constant}$$

$$T \propto g_{*S}^{-1/3} R^{-1}$$

When the number of species in the comoving volume is constant

$$N = n R^3 = \text{const.}$$

$$Y \equiv \frac{n}{s} = \text{const.}$$

eg) baryon number

Compared to the photon number density $n = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3$

there is a relation

$$s = 1.80 g_{*S} n_\gamma \qquad s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3$$

and today

$$s = 7.04 n_\gamma \qquad \text{with} \qquad g_{*S} = 3.91$$

Entropy is conserved in the comoving volume,

$$s(T) R^3 = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad T \propto g_{*S}^{-1/3} R^{-1}$$

When the number of species in the comoving volume is constant

$$N = n R^3 = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad Y \equiv \frac{n}{s} = \text{const.} \qquad \text{eg) baryon number}$$

Time-temperature relation

In radiation-dominated era,

$$\text{Radiation } (p = \frac{1}{3}\rho)$$

$$R \propto t^{1/2}$$

$$\text{Matter } (p = 0)$$

$$R \propto t^{2/3}$$

$$\text{Vacuum energy } (p = -\rho)$$

$$R \propto \exp(Ht)$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{1}{4t^2}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \propto g_* T^4$$

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$$



$$t = 0.301 g_*^{-1/2} \frac{M_P}{T^2} \sim \left(\frac{T}{\text{MeV}}\right)^{-2}$$

$$1 \text{ sec} \sim 1 \text{ MeV}$$

$$10^{12} \text{ sec} \sim 1 \text{ eV}$$

$$M_P^2 = \frac{1}{8\pi G}$$

Particle horizon again

$$\begin{aligned}d_p(t) &= \int_0^{r_p} \frac{R(t)dr}{\sqrt{1-kr^2}} = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{R(t)} \frac{dR(t')}{\dot{R}(t')R(t')} \\ &= \frac{1}{H_0(1+z)} \int^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[x^2(1-\Omega_0) + \Omega_0 x^{1-3\omega}]^{1/2}}\end{aligned}$$

$$d_p(t) = 2t \quad \text{Radiation } (p = \frac{1}{3}\rho)$$

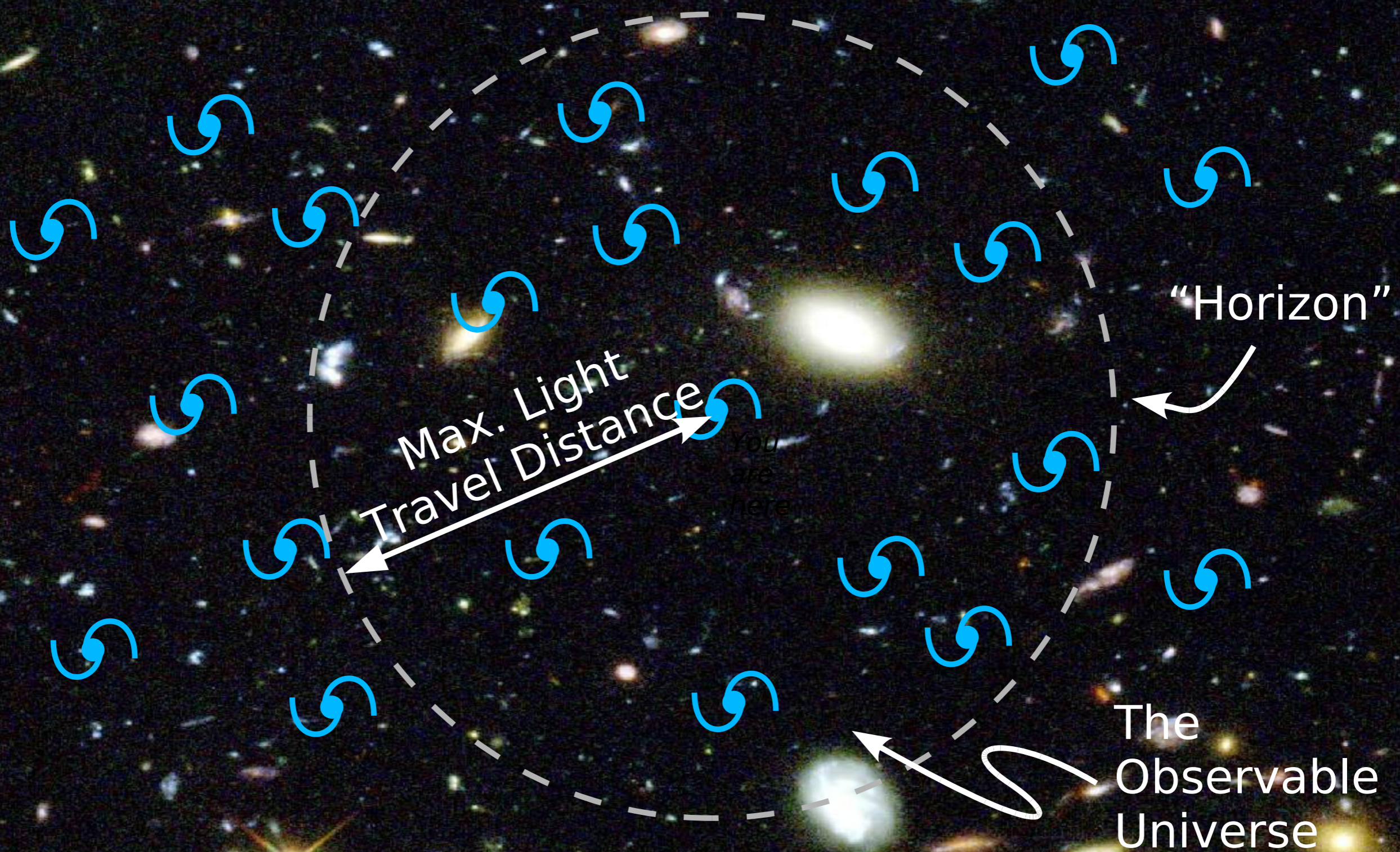
$$d_p(t) = 3t \quad \text{Matter } (p = 0)$$

$$d_p(t) = \frac{t}{1-n}, \quad n = \frac{2}{3(1+\omega)}$$

diverges for $\omega < -\frac{1}{3}$

Even if the Universe is infinite, the *Observable Universe* is finite

Size=14 billion pc = 46 billion ly



허블 지평선 (Hubble horizon)

$$d_H(t) = cH(t)^{-1}$$

- : $H(t)^{-1}$ 는 시각 t 에서 우주팽창의 특징적 시간규모를 나타내며
- : $d_H(t)$ 는 그 특징적 시간 내에 상호작용할 수 있는 영역의 크기를 나타낸다.

| | 좌표 | k-mode | co-moving k-mode |
|--------------|--------------|---------------|------------------|
| superhorizon | $L > H^{-1}$ | $R^{-1}k < H$ | $k < RH$ |
| subhorizon | $L < H^{-1}$ | $R^{-1}k > H$ | $k > RH$ |

Curvature term in the Friedmann equation

$$\boxed{H^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho} \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{k}{R^2 H^2} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} - 1 \equiv \Omega - 1}$$

1. In the early Universe, the curvature term is negligible compared to the matter or radiation. Thus the Friedmann eq. at early time is

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3}\rho$$

2. Thus in the Friedmann eq. the curvature term evolves as

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 R^2} \propto \frac{1}{\rho R^2} \propto \begin{array}{ll} R & \text{for MD} \\ R^2 & \text{for RD} \end{array}$$

The present Universe is almost flat. Thus at early epoch, the Universe was more flat and close to critical.

평탄성 문제 (Flatness problem)

The expansion age of the Universe

Then now we can integrate and obtain time as an integral function

$$t \equiv \int_0^{R(t)} \frac{dR'}{\dot{R}'}$$

In general, from Friedmann eq. at present time,

$$k = (\Omega_0 - 1)R_0^2 H_0^2$$

and rewrite the Friedmann equation again,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - (\Omega_0 - 1) \frac{R_0^2 H_0^2}{R^2}$$

and rewrite it again,

$$\dot{R}^2 = H_0^2 R_0^2 \left[\sum_i \Omega_{i0} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-1-3\omega} - (\Omega_0 - 1) \right]$$

The age of the Universe

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t dt = \int_0^{R(t)} \frac{dR'}{\dot{R}'} \\ &= H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1 - \Omega_0 + \sum_i \Omega_{i0} x^{1-3\omega_i}]^{1/2}} \end{aligned}$$

For flat Universe, ($\Omega_0 = 1$), the age of the present universe is

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1}$$

$$t_0 = \frac{1}{2} H_0^{-1} \quad \text{Radiation } (p = \frac{1}{3}\rho)$$

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \quad \text{Matter } (p = 0)$$

허블 지평선 (Hubble horizon)

$$d_H(t) = cH(t)^{-1}$$

- : $H(t)^{-1}$ 는 시각 t 에서 우주팽창의 특징적 시간규모를 나타내며
- : $d_H(t)$ 는 그 특징적 시간 내에 상호작용할 수 있는 영역의 크기를 나타낸다.

$$d_H(t) = H(t)^{-1} = \frac{3(1 + \omega)}{2}t$$

$$d_H(t) = 2t \quad \text{Radiation } (p = \frac{1}{3}\rho)$$

$$d_H(t) = \frac{3}{2}t \quad \text{Matter } (p = 0)$$

빅뱅모형의 문제

● 빅뱅 우주론의 문제점

우주배경복사의 발견과 함께 표준우주론이 넓게 받아들여지게 되었다.
하지만 그 속에 여전히 이해할 수 없는 문제가 있었다.

- 뜨거운 우주의 시작? (the singularity problem)
- 왜 공간이 평탄한가? (the flatness problem)
- 왜 물질 분포가 균일한가? (the horizon problem)
- 은하형성의 문제? (the galaxy formation problem)
- 물질-반물질의 비대칭성? (the baryon asymmetry problem)
- 자발적으로 깨어진 대칭성의 문제? (the domain wall problem)
- 자기홀극의 문제? (the primordial monopole problem)
- 중력미자의 문제? (the gravitino problem)
- 진공에너지의 문제? (the vacuum energy problem)

- 뜨거운 우주의 시작? (the singularity problem)

$t \rightarrow 0$ 로 갈수록, 우주의 밀도는 무한대로 증가한다.

$$\rho \propto R^{-4} \quad \text{Radiation}$$

$$\rho \propto R^{-3} \quad \text{(Cold) Matter}$$

$t = 0$ 이전이 존재할까?

우주는 무엇으로부터 시작하였을까?

모든 우주가 한 점에서 시작하였을까?

$t < t_{\text{Pl}}$ 새로운 이론이 필요?

아직도 해결책은 묘연하다.

- 왜 물질 분포가 균일한가? (the horizon problem)
- 왜 공간이 평탄한가? (the flatness problem)
- 은하형성의 문제? (the galaxy formation problem)

- 왜 물질 분포가 균일한가? (the horizon problem)
- 왜 공간이 평탄한가? (the flatness problem)
- 은하형성의 문제? (the galaxy formation problem)

인플레이션, 빅뱅이론 이전에 아주 빠른 팽창이 있으면, 위의 문제들을 해결할 수 있다. 인플라톤이라 불리는 입자의 진공에너지에 의하여 우주가 가속 팽창을 하다가 그 입자가 붕괴하여 가벼운 세상의 물질들이 생기고 빅뱅 우주가 시작되었다.

Starobinsky (1979), Guth (1981), Linde (1981), Sato (1981), Albrecht and Steinhardt (1982)

- 왜 물질 분포가 균일한가? (the horizon problem)
- 왜 공간이 평탄한가? (the flatness problem)
- 은하형성의 문제? (the galaxy formation problem)

인플레이션, 빅뱅이론 이전에 아주 빠른 팽창이 있으면, 위의 문제들을 해결할 수 있다. 인플라톤이라 불리는 입자의 진공에너지에 의하여 우주가 가속 팽창을 하다가 그 입자가 붕괴하여 가벼운 세상의 물질들이 생기고 빅뱅 우주가 시작되었다.

Starobinsky (1979), Guth (1981), Linde (1981), Sato (1981), Albrecht and Steinhardt (1982)

- 우주 초기의 작은 섭동들은 어떻게 생겼는가?

- 왜 물질 분포가 균일한가? (the horizon problem)
- 왜 공간이 평탄한가? (the flatness problem)
- 은하형성의 문제? (the galaxy formation problem)

인플레이션, 빅뱅이론 이전에 아주 빠른 팽창이 있으면, 위의 문제들을 해결할 수 있다. 인플라톤이라 불리는 입자의 진공에너지에 의하여 우주가 가속 팽창을 하다가 그 입자가 붕괴하여 가벼운 세상의 물질들이 생기고 빅뱅 우주가 시작되었다.

Starobinsky (1979), Guth (1981), Linde (1981), Sato (1981), Albrecht and Steinhardt (1982)

- 우주 초기의 작은 섭동들은 어떻게 생겼는가?

인플레이션, 또한 우주 거대구조의 씨앗이 되는 초기 섭동을 설명한다. 인플레이션 때 작은 규모의 양자 요동이 우주의 급속한 팽창으로 우주론적 크기로 커지게 되고 물질 밀도의 섭동을 만들게 된다. 이 섭동이 나중에 커지게 되면서 은하, 은하단과 같은 우주의 구조물들을 만들게 된다.

Starobinsky (1982), Guth & Pi(1982), Hawking (1982), Bardeen, Steinhardt, Turner (1983), Brandenberger, Kahn, Press (1983), Guth, Pi (1985)

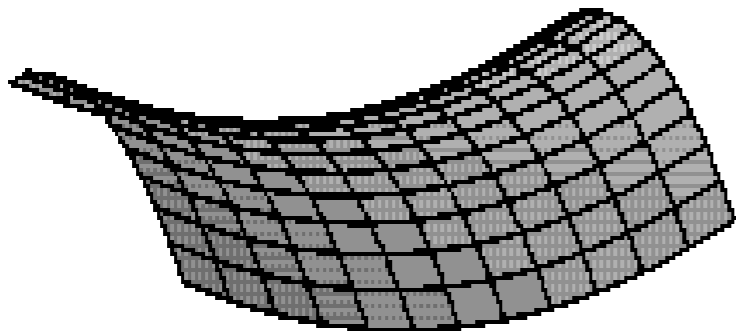
평탄성 문제 (the flatness problem)

: 프리드만 방정식에 따르면, 복사, 물질 지배에서는 곡률이 시간에 따라 증가한다.

$$(RH)^{-1} \propto R^{(1+3\omega)/2}$$

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 R^2} \propto \frac{1}{\rho R^2} \propto \begin{matrix} R & \text{for MD} \\ R^2 & \text{for RD} \end{matrix}$$

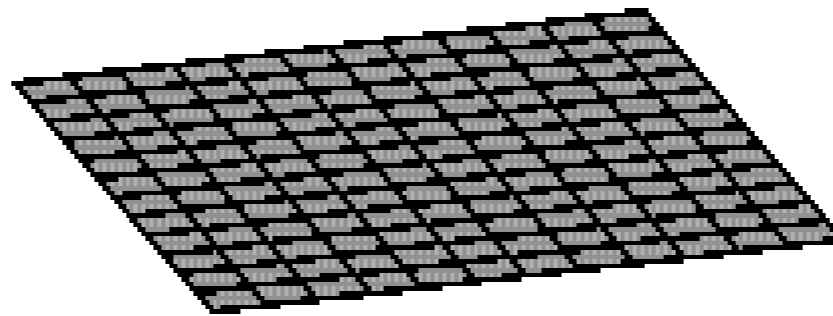
관측에 따르면 현재의 우주는 1% 이내에서 평탄성을 보인다. 그러므로 초기우주는 더욱 평탄하여야 한다.



$k < 0$
열린 우주

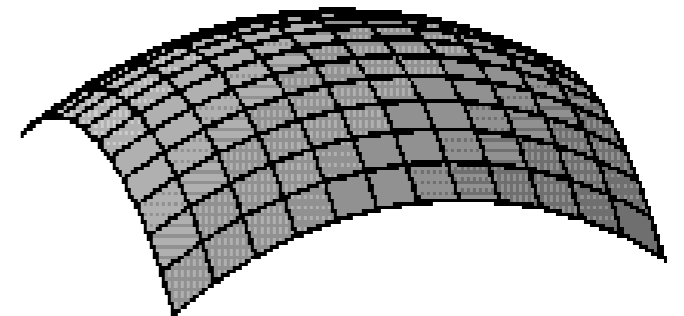
삼각형
내각 합

< 180



$k = 0$
평탄한 우주

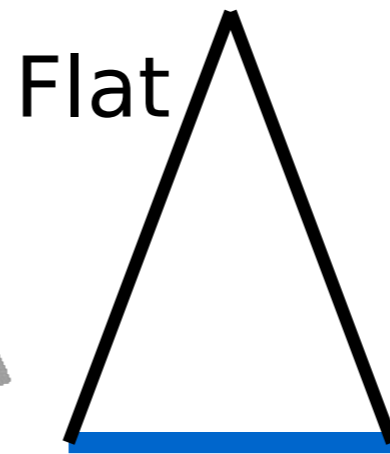
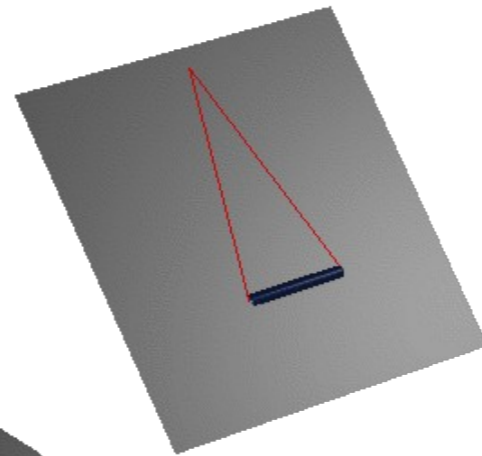
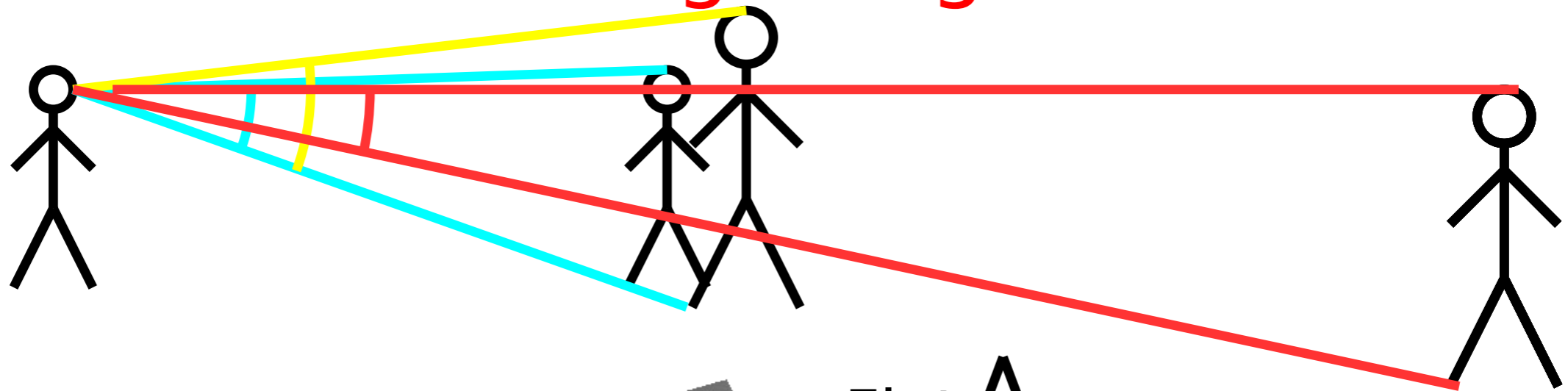
$= 180$



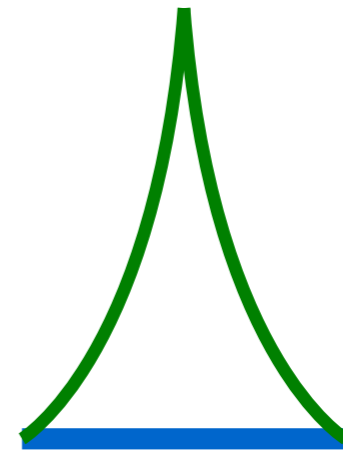
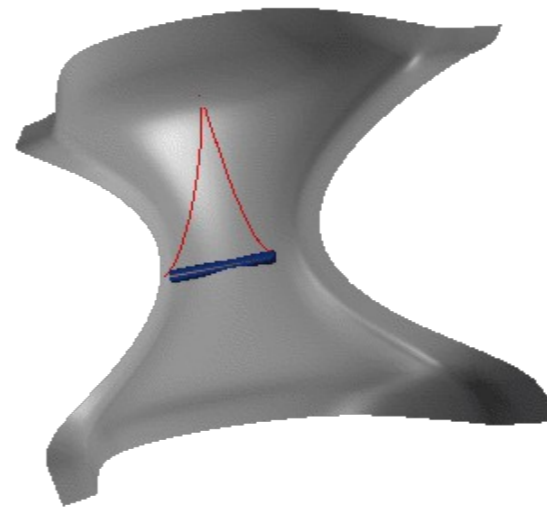
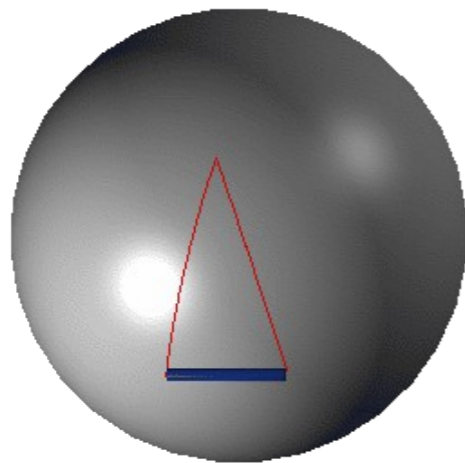
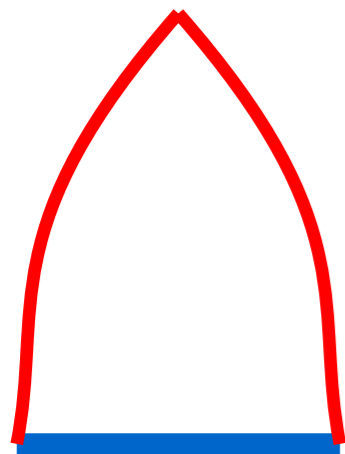
$k > 0$
닫힌 우주

> 180

How big things look



Open:
Looks Smaller



Closed:
Looks Bigger

공간의 곡률: 플랑크 위성의 우주배경복사 관측

: 평탄한 우주와 일치, 곡률이 관측되지 않음.

$$100\Omega_K = -0.05^{+0.65}_{-0.66} \quad (95\%; \text{Planck+WP+highL+BAO}),$$

$$100\Omega_K = -0.10^{+0.62}_{-0.65} \quad (95\%; \text{Planck+lensing+WP} \\ \text{+highL+BAO}).$$

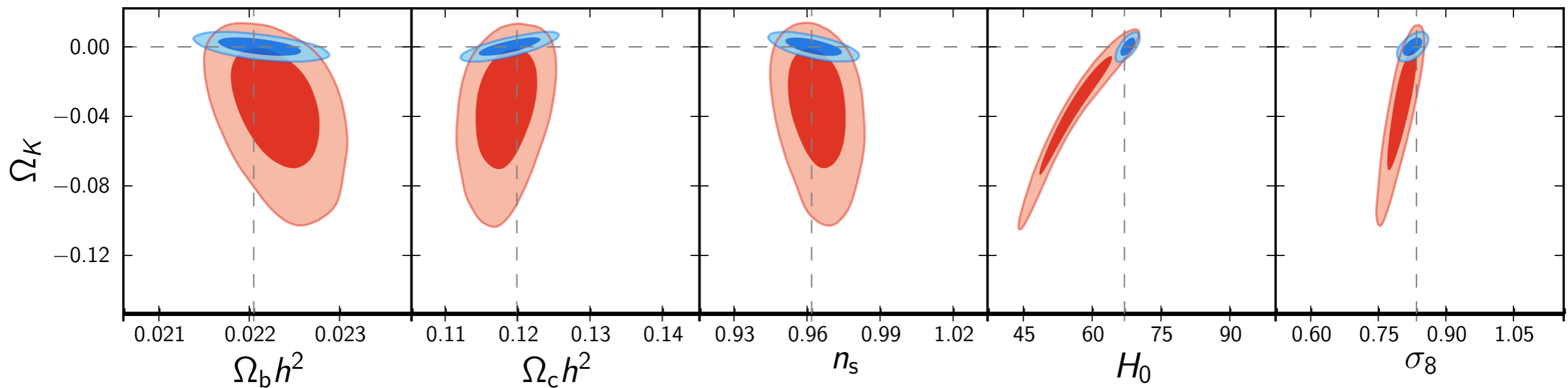


Fig. 21. 68% and 95% confidence regions on one-parameter extensions of the base Λ CDM model for *Planck*+WP (red) and *Planck*+WP+BAO (blue). Horizontal dashed lines correspond to the fixed base model parameter value, and vertical dashed lines show the mean posterior value in the base model for *Planck*+WP.

$$\frac{|\Omega_i - 1|}{|\Omega_0 - 1|} = \frac{R_i^2}{R_{eq}^2} \frac{R_{eq}}{R_0} \simeq 10^{-3} \left(\frac{T_{eq}}{T_i} \right)^2$$

$$T_{eq} \sim \text{eV}$$

$$(RH)^{-1} \propto R^{(1+3\omega)/2}$$

관측으로부터, 현재

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 R^2} < 0.01$$

따라서, BBN 시기에는

$$|\Omega_k| \lesssim 10^{-18}$$

또는 Planck 시기에는

$$|\Omega_k| \lesssim 10^{-63}$$

과거에 곡률항이 왜 이렇게 작은가?

평탄성 문제 (the flatness problem)

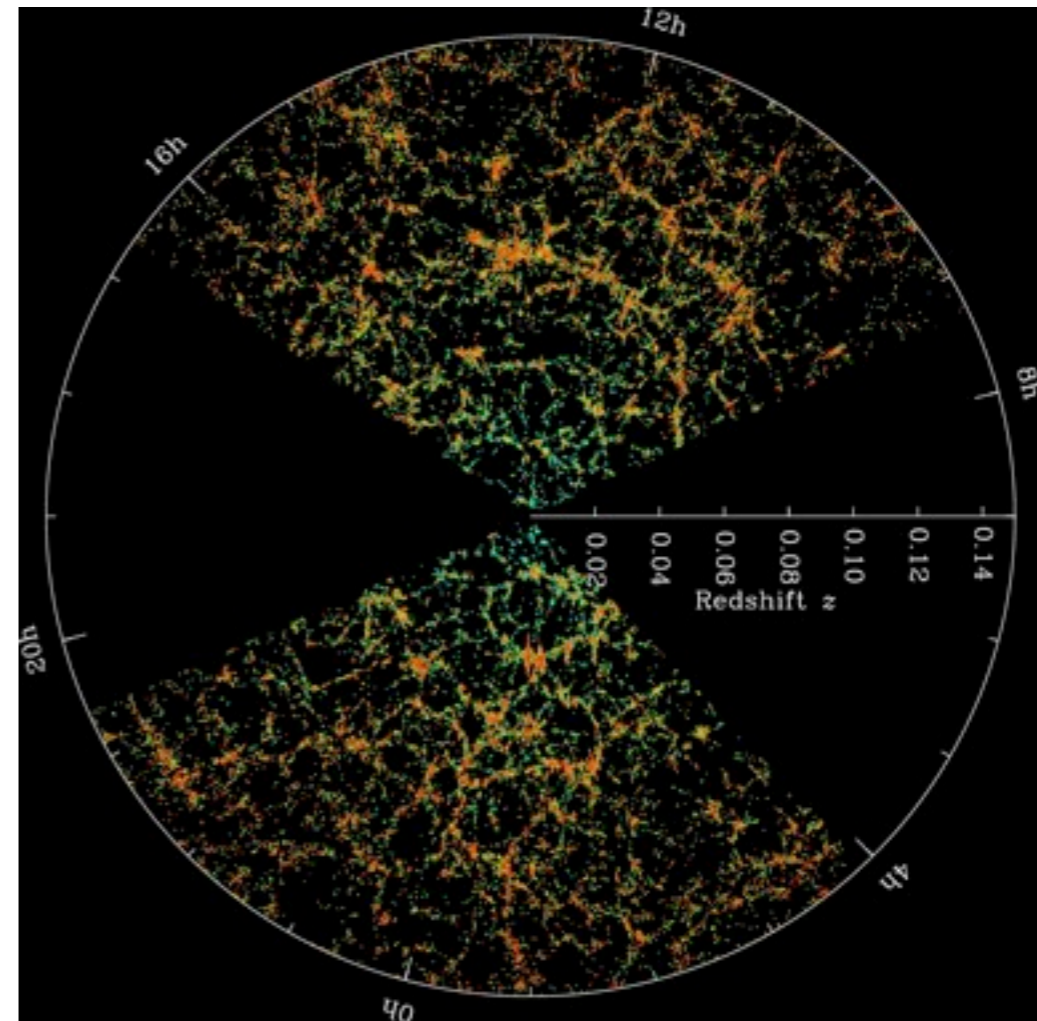
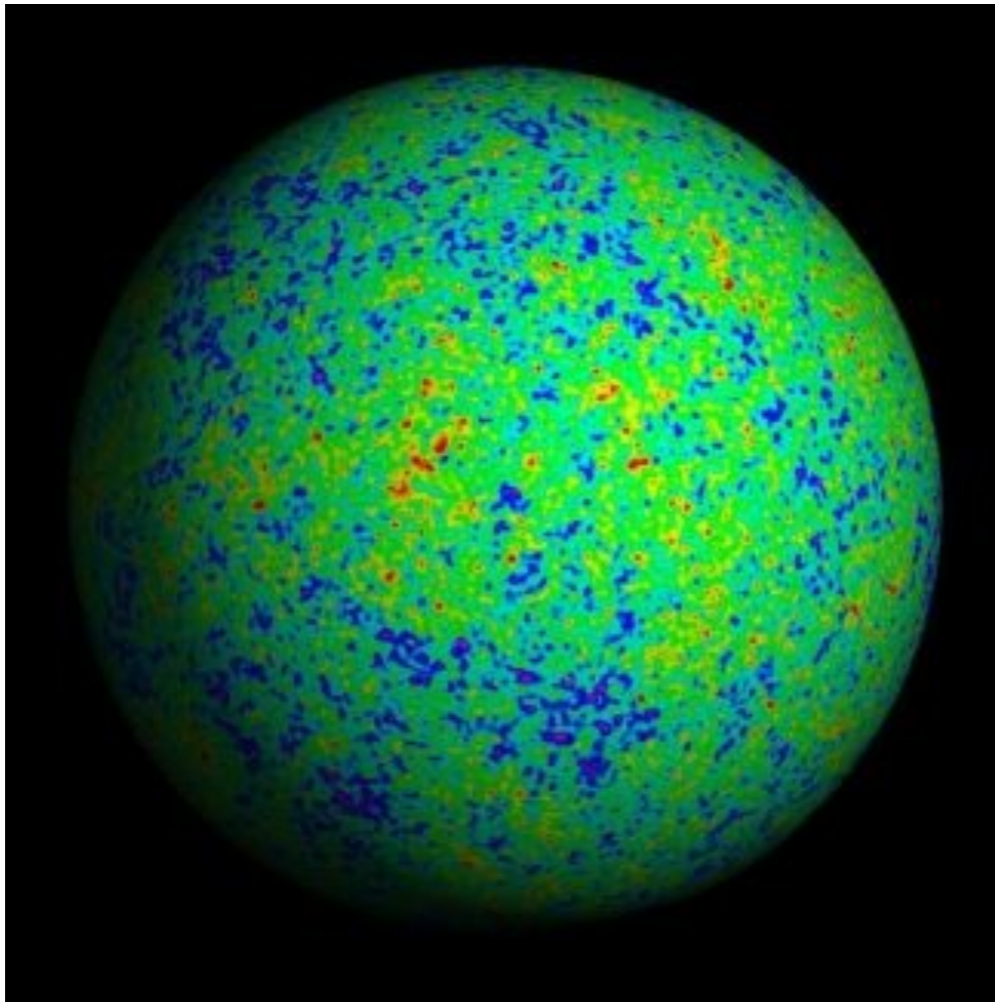
1. 처음부터 $k=0$, 평탄한 우주
2. 초기 우주는 다른 형태의 물질에 의하여 진화

지평선 문제 (the horizon problem)

(causality problem)

우주배경 복사의 온도 분포

은하들의 분포



$l \gtrsim 10^2 \text{ Mpc}$ 에서 우주는 거의 균일하고 등방적이다.

$$\frac{\delta\rho(t, \mathbf{x})}{\rho_0(t)} \sim \frac{\delta T(t, \mathbf{x})}{T_0(t)} \sim 10^{-5}$$

왜 이렇게 비슷한가?

입자 지평선 $d_p(t) = \frac{3(1 + \omega)}{1 + 3\omega} t$

$\omega > -\frac{1}{3}$ 의 물질에 대하여, 입자 지평선은 시간에 따라 증가한다.

: 이전에 접촉이 없었던 새로운 영역이 처음으로 서로 접촉이 가능하게 된다.

$\sim H^{-1}$ 허블 크기

--> 두 지점이 처음으로 접촉이 가능하므로, 서로 공통된 특징을 가질 이유는 없다.

: 우주배경복사의 온도, 물질분포의 밀도 등 서로 완전히 달라야 한다.

우주배경 복사가 만들어지는 시점에서, 허블지평선의 크기를 구해 보면, 우주배경복사에서 보이는 크기보다 훨씬 작다.

→ 처음부터 전 우주가 그냥 거의 같았다.

→ 왜 같게 되었을까? 어떤 기작이 있지 않을까?

어떻게 하면 서로 접촉할 수 있게 만들 수 있을까?

$$a_0 = 1 \quad c = 1$$

현재 허블 지평선 거리에서도 균일하다.

현재 허블 지평선 거리의 co-moving 거리: $k_0^{-1} = (a_0 H_0)^{-1} \simeq 10^4 \text{ Mpc}$

우주배경 복사가 만들어지는 빛의 마지막 산란시기에는,

$$H^{-1} = H_0^{-1} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \simeq 10^{-1} \text{ Mpc} \quad H_0^{-1} \sim 10^4 \text{ Mpc}$$

co-moving 거리로 환산하면,

$$(aH)^{-1} \simeq 10^2 \text{ Mpc}$$

그러므로,

$$\frac{(aH)^{-1}}{k_0^{-1}} \simeq 10^{-2}$$

그러므로, 현재 100 Mpc 큰 거리에서 우주배경복사의 빛들은 서로 접촉할 수 없었다. 그런데도 왜 온도가 거의 같은가?

$$(RH)^{-1} \propto R^{(1+3\omega)/2}$$

CMB 마지막 산란기

$$k_0^{-1} = (a_0 H_0)^{-1} \simeq 10^4 \text{ Mpc}$$

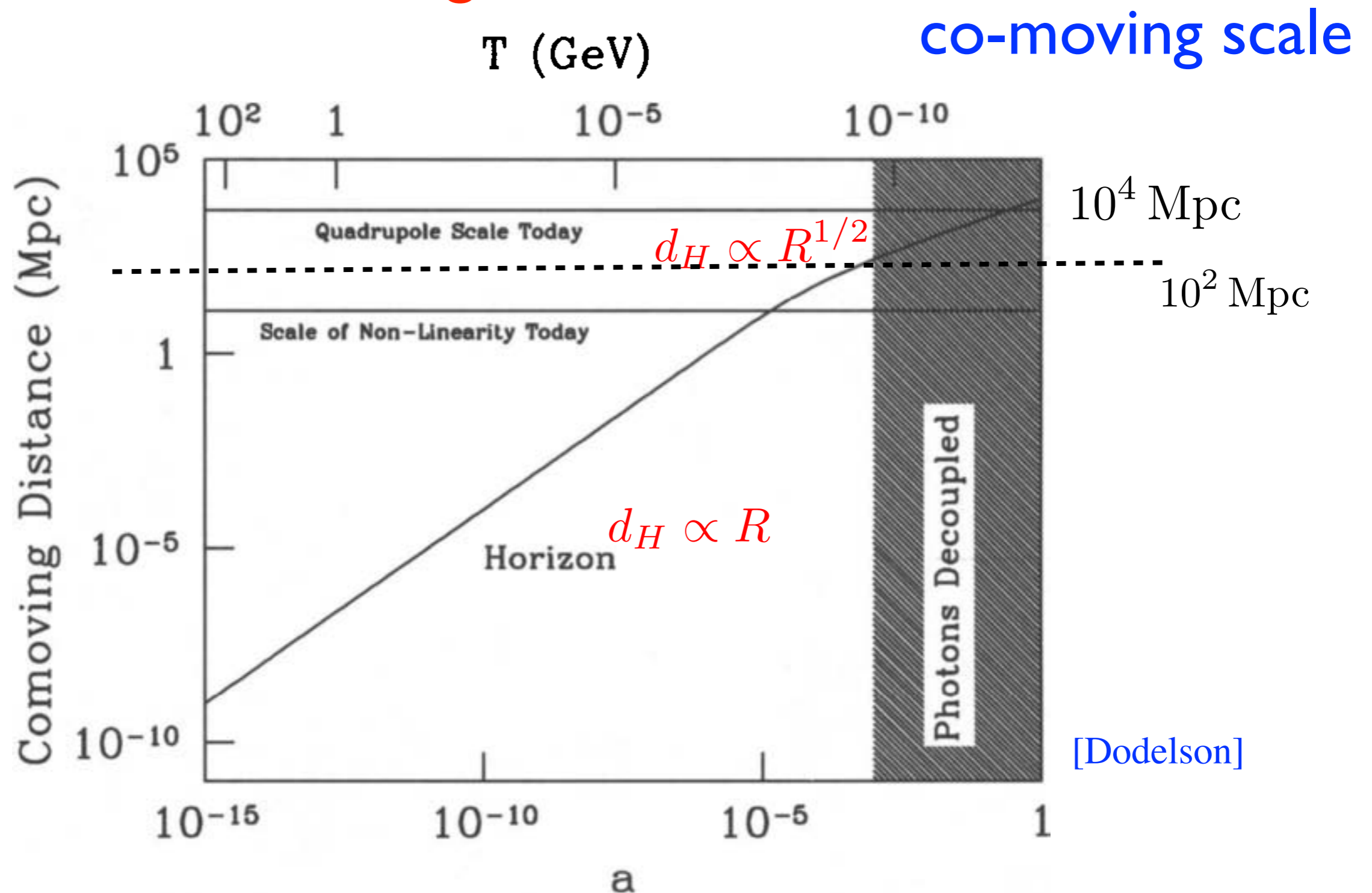


$$(aH)^{-1} \simeq 10^2 \text{ Mpc}$$

지평선보다도 훨씬 먼 위치의 지점들 사이에서도 그 온도가 거의 비슷하다. 그런데 표준모형에서 복사지배나 물질시배에서는

$$\frac{(aH)^{-1}}{k_0^{-1}} \simeq 10^{-2}$$

CMB is almost homogeneous.

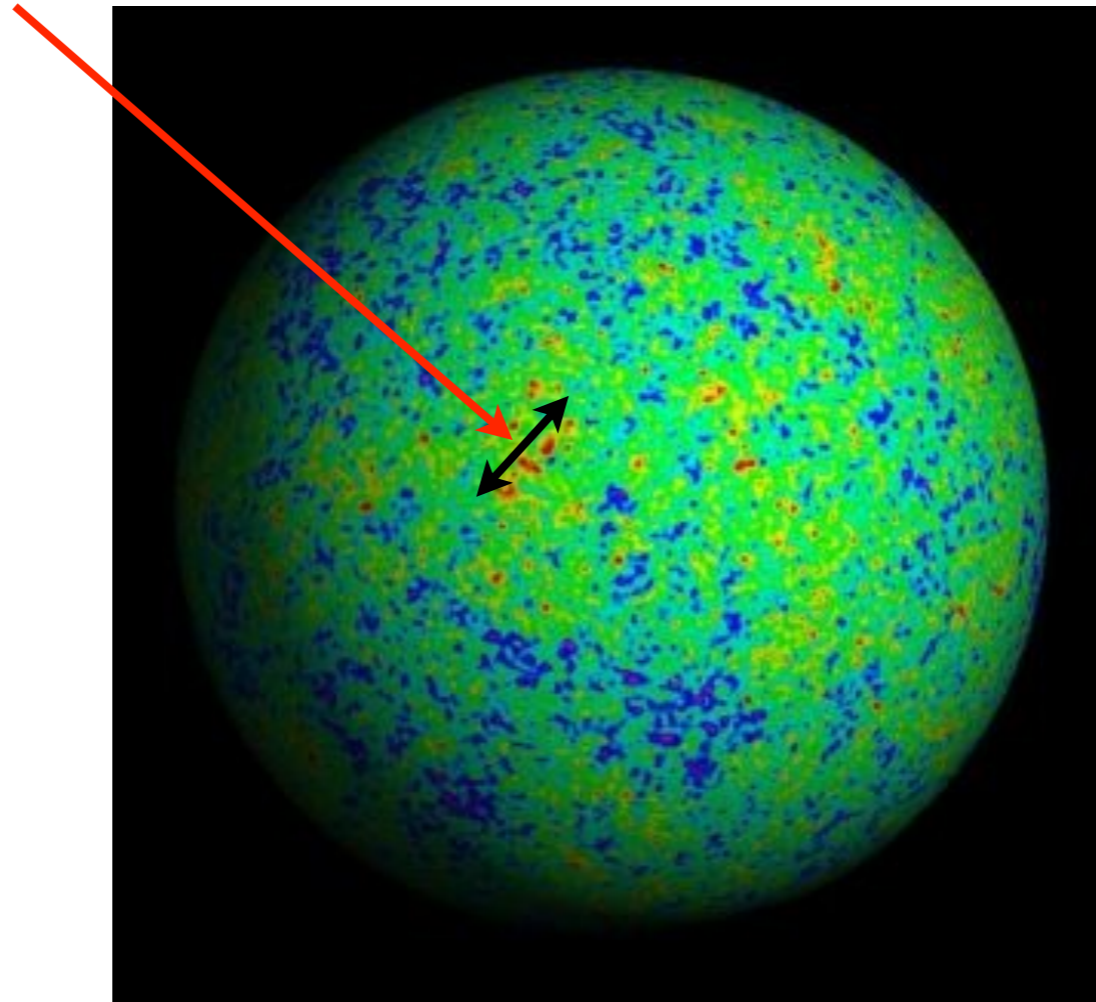


co-moving horizon increases with time in hot big bang theory.
More serious if we consider the early Universe.

With Physical scale?

지평선 문제 (the horizon problem)

horizon size at the time of last scattering



표준모형의 복사지배 또는 물질지배의 시대에서는 우주가 왜 그 정도로 균일하고 등방한지를 설명할 수 없다.

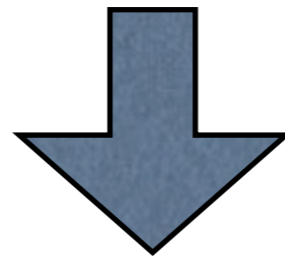
평탄성 문제 (the flatness problem)

지평선 문제 (the horizon problem)

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 R^2} < 0.01$$

$$\frac{(RH)^{-1}}{(R_0 H_0)^{-1}} \simeq 0.01$$

“시간에 따라 co-moving 허블 사이즈가 증가한다” 라는 것이 초기 조건의 문제를 심각하게 만든다.



“시간에 따라 co-moving 허블 사이즈를 감소하게 만드는 것” 은 문제를 해결할 수 있다.

인플레이션

만약 허블 팽창 계수가 거의 상수라면, 우주의 팽창은 아주 평탄한 우주를 만들 수 있다.

평탄성 문제 (the flatness problem)

지평선 문제 (the horizon problem)

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 R^2} < 0.01$$

$$\frac{(RH)^{-1}}{(R_0 H_0)^{-1}} \simeq 0.01$$

at last scattering

시간에 따라 co-moving 허블 사이즈를 증가시킨다.

빅뱅우주의 해결책: 인플레이션

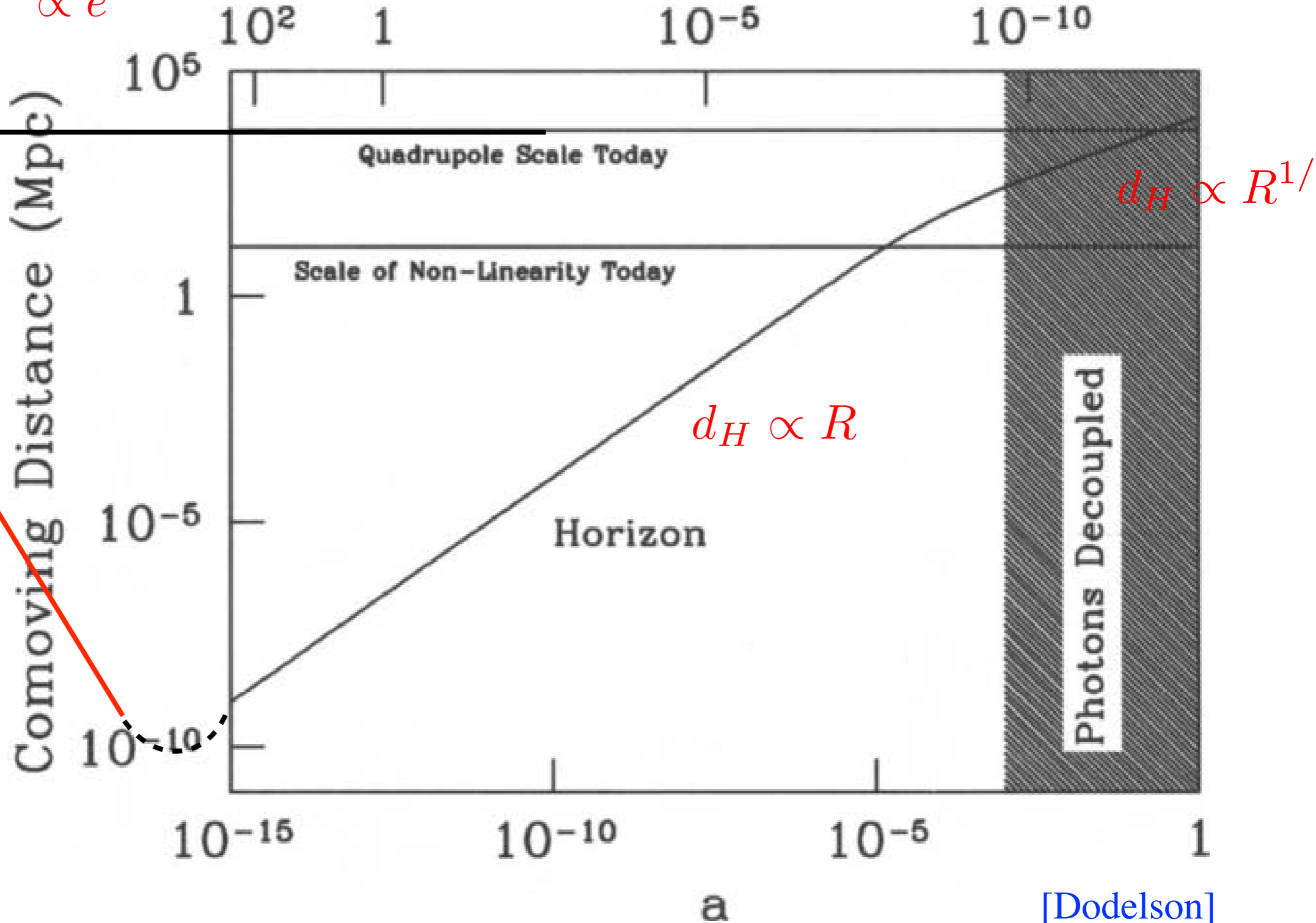
: 기하급수적인 아주 빠른 팽창 $R(t) \propto e^{Ht}$

T (GeV) **co-moving scale**

$$(aH)^{-1} \propto R^{-1} \propto e^{-Ht}$$

Inflation

↑
Inside
horizon



[Dodelson]

$(RH)^{-1}$ 가 감소하기 위한 조건

$$\frac{\partial(RH)^{-1}}{\partial t} < 0 \Rightarrow \ddot{R} > 0$$

: 가속 팽창하는 우주

또는, 팽창계수의 가속공식에서

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a > 0$$

\Rightarrow

$$\omega = \frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3}$$

거의 변하지 않는 허블 변수를 가정하면,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \longrightarrow a(t) \sim a_0 e^{Ht}$$

$$\begin{aligned} k = +1 & \quad a(t) = H^{-1} \cosh H t \\ k = 0 & \quad a(t) = H^{-1} e^{Ht} \\ k = -1 & \quad a(t) = H^{-1} \sinh H t \end{aligned}$$

그리고 곡률은 기하급수적으로 감소한다.

$$|\Omega_K| = \frac{|k|}{a^2 H^2} \propto e^{-2Ht}$$

그러므로 현재의 값은

$$|\Omega_K|_0 = \frac{|k|}{a_0^2 H_0^2} = e^{-2N} \left(\frac{a_i H_i}{a_0 H_0} \right)^2 \lesssim 0.01$$

e-folding number: $N = \int H dt$

$$e^N \gtrsim 10 \left(\frac{a_f H_f}{a_0 H_0} \right) = 10 \left(\frac{a_0}{a_f} \right)$$

평탄성 문제 해결

인플레이션의 끝이 $T=1\text{MeV}$ 이라면, (BBN 으로부터 $T > 1\text{MeV}$)

$$\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \simeq \frac{T_f}{T_0} = \frac{1\text{MeV}}{0.001\text{eV}} \simeq 10^8$$

필요한 e-folding 은

$$N \gtrsim \log(10^9) \simeq 20.7$$

인플레이션의 끝이 $T = 10^{16}\text{GeV}$ 이라면,

$$N \gtrsim \log(10^{29}) \simeq 66.8$$

$$a_0 = 1 \quad c = 1$$

현재 허블 지평선 거리에서도 균일하다.

현재 허블 지평선 거리의 co-moving 거리: $k_0^{-1} = (a_0 H_0)^{-1} \simeq 10^4 \text{ Mpc}$

우주배경 복사가 만들어지는 빛의 마지막 산란시기에는,

$$H^{-1} = H_0^{-1} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \simeq 10^{-1} \text{ Mpc} \quad H_0^{-1} \sim 10^4 \text{ Mpc}$$

co-moving 거리로 환산하면,

$$(aH)^{-1} \simeq 10^2 \text{ Mpc}$$

인플레이션 시기까지 포함하면,

$$\frac{(a_i H_i)^{-1}}{(a_0 H_0)^{-1}} = e^N \left(\frac{a_f}{a_0} \right) \gtrsim 1 \quad \text{즉,} \quad e^N \gtrsim \left(\frac{a_0}{a_f} \right) \quad \boxed{\text{지평선 문제 해결}}$$

인플레이션의 끝과 재가열(reheating)

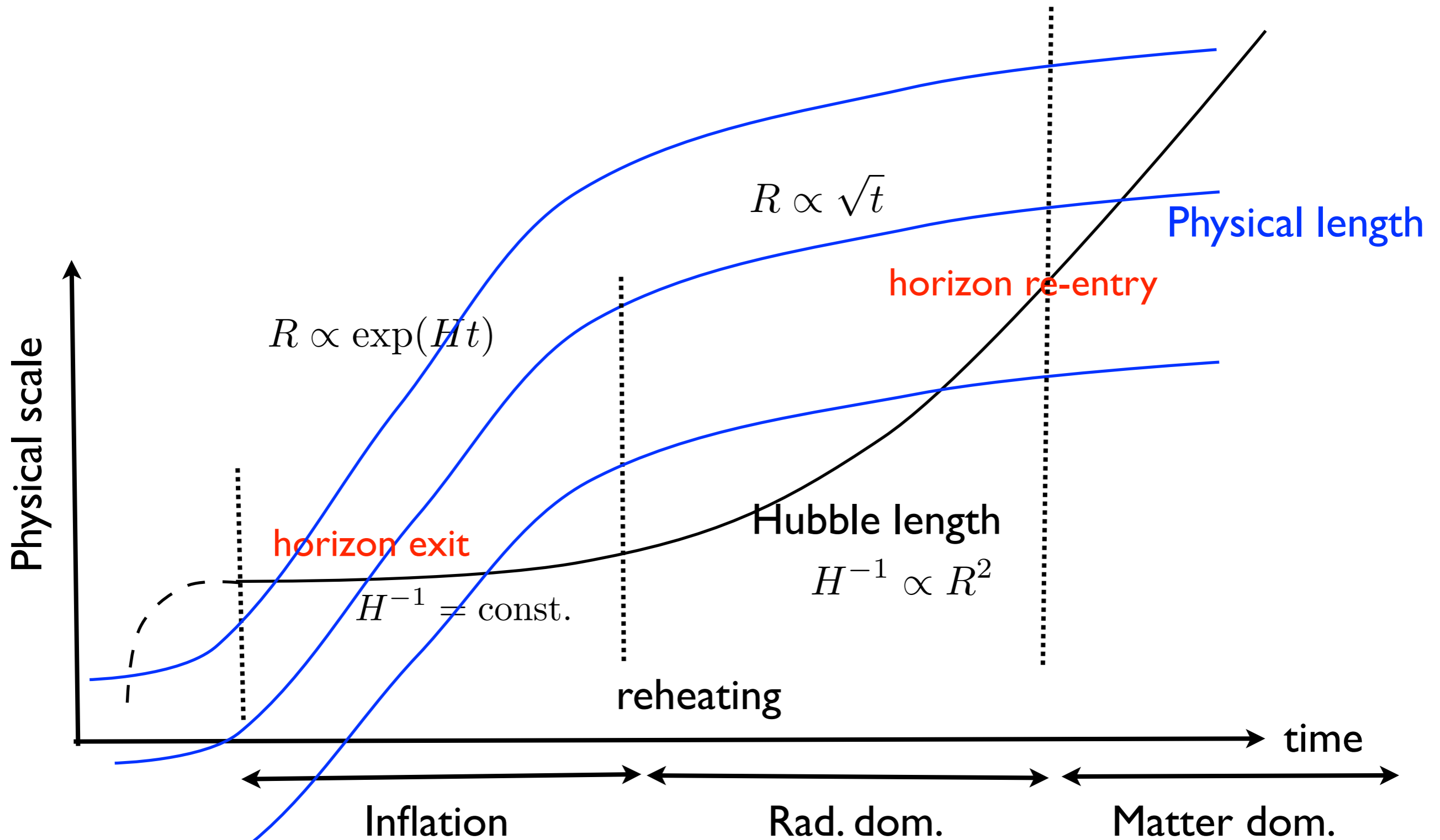
인플레이션이 끝나고 난 후, 우주가 재가열되어진다. (reheating)

- 허블 팽창 계수가 감소하고, 진공에너지에 갇혀있던 에너지가 열적에너지로 변환되며, 물질들이 생겨나고 뜨거운 초기우주의 상태가 된다.
- 뜨거운 빅뱅우주의 초기조건은 인플레이션의 과정에 의하여 주어지게 되며, 인플레이션 이전의 우주구조에 의해서는 거의 영향을 받지 않는다. (cosmic no hair)

Horizon exit and reentry

physical scale

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k}, \quad \lambda_{\text{phys}} = R(t)\lambda$$



인플레이션을 얻기 위하여

지평선문제, 평탄성 문제를 풀기 위해서는

$$\frac{(a_f H_f)}{(a_i H_i)} \propto t^{-\frac{1+3\omega}{3(1+\omega)}} \quad \text{가 충분히 증가.} \quad \longrightarrow \quad \omega < -\frac{1}{3}$$

허블방정식에서 $d_H(t) = H(t)^{-1} = \frac{3(1+\omega)}{2} t$
 $R \propto t^{2/3(1+\omega)}$

1. 충분한 팽창: e-folding 수 $> 50 - 60$

2. 작은 섭동의 스펙트럼: 파워 스펙트럼, spectral index, tensor